

**Numerik 1**

Blatt 2

Abgabe: 9. November 2017

*Mehr lineare Algebra*

**Aufgabe 9** (Präsenzaufgabe).

Zeigen Sie, dass

- (a)  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  keine normalisierte (d.h. mit  $L_{11} = L_{22} = 1$ )  $LU$ -Zerlegung und  
(b)  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  keine Cholesky-Zerlegung besitzt.

**Aufgabe 10** (4 Punkte). *Rücksubstitutionsalgorithmus*

Für eine gegebene reguläre obere Dreiecksmatrix,  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , schreiben Sie den Rücksubstitutionsalgorithmus aus der Vorlesung als eine Hintereinanderausführung elementarer Rechenoperationen:

$$\tilde{\phi} = f_J \circ f_{J-1} \circ \dots \circ f_1.$$

**Aufgabe 11** (4 Punkte). *Positiv-definite Matrizen*

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine positiv definite Matrix, d.h. es gelte  $x^T A x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $A$  regulär ist.  
(b) Zeigen Sie, dass für alle  $1 \leq k \leq n$  die  $k \times k$ -Untermatrix  $A_k := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$  ebenfalls positiv definit ist.  
(c) Zeigen Sie, dass alle reellen Eigenwerte von  $A$  positiv sind.

**Aufgabe 12** (4 Punkte).  $A_k = L_k U_k$

Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , eine untere Dreiecksmatrix  $L$  sowie eine obere Dreiecksmatrix  $U$  mit  $A = LU$  gegeben. Zeigen Sie, dass für  $k = 1, 2, \dots, n$  und die linken, oberen  $k \times k$ -Teilmatrizen  $A_k$ ,  $L_k$  und  $U_k$  von  $A$ ,  $L$  beziehungsweise  $U$  ebenfalls die Zerlegung  $A_k = L_k U_k$  gilt.

**Aufgabe 13** (4 Punkte). *Symmetrische Matrizen und Bandmatrizen*

- (a) Wie lässt sich die LU-Zerlegung im Fall symmetrischer Matrizen vereinfachen und welcher Aufwand ergibt sich?  
(b) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Bandmatrix mit Bandweite  $m$ , d.h. es gelte  $a_{ij} = 0$  falls  $|i - j| > m$ . Wie groß ist der Aufwand der Berechnung der LU-Zerlegung, sofern diese existiert?

---

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.