Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2017

Numerik 1

Blatt 3

Abgabe: 23. November 2017

Matrixnormen

Aufgabe 14 (Präsenzaufgabe)**.** *Eine inkompatible Matrixnorm*

Zeigen Sie, dass durch $\|A\| := \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ eine Norm jedoch keine Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ $(n > 1)$ definiert wird.

Aufgabe 15 (4 Punkte)**.** *Eigenschaften der Operatornorm*

Seien $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ und sei $\|\cdot\|_{\text{op}}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Zeigen Sie:

(1) $\|\cdot\|_{\text{op}}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(2) $\|A\|_{\text{op}} := \sup_{\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_n=1\}} \|Ax\|_m = \inf\{c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|Ax\|_m \leq c\|x\|_n\}$.

(3) Für $A \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $\|x\|_n \leq 1$ und $\|Ax\|_m = \|A\|_{\text{op}}$ folgt $\|x\|_n = 1$.

(4) Das Infimum und das Supremum in (2) werden angenommen.

Aufgabe 16 (4 Punkte)**.** *Die induzierten l^p-Matrixnormen*

(1) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|x\|_p$ die l^p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|A\|_p$ die dazugehörige induzierte Matrixnorm auf $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1\|A\|_\infty$$

gilt.

(2) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Abschätzungen

$$n^{-1/2}\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq n^{1/2}\|A\|_2$$
$$n^{-1}\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\|A\|_\infty$$

gelten und geben Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, die zeigen, dass sich die Abschätzungen nicht verbessern lassen (d.h. für jede dieser vier Ungleichungen und jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ finden Sie ein A, sodass Gleichheit gilt).

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** *Die Frobeniusnorm*

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch $\|A\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2$.

Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\text{tr}(A^TA)}.$$

Folgern Sie, dass die Frobeniusnorm mit der von der Euklidischen Norm induzierten Operatornorm verträglich ist in dem Sinne, dass

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathcal{F}} \leq \sqrt{n}\|A\|_2.$$

[Sie dürfen dazu die Identität $\text{tr}(A^TA) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ mit den (wohlgemerkt nichtnegativen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A^TA verwenden.]

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** *Auslöschungseffekte*
Wie lassen sich Auslöschungseffekte bei der praktischen Berechnung der Ausdrücke

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x}, \qquad \frac{e^x - 1}{x}$$

für $x \neq 0$ mit $|x| << 1$ vermeiden?

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.