

Numerik 1

Blatt 4

Abgabe: 7. Dezember 2017

Gauß mit Pivotsuche, Ausgleichsprobleme

Aufgabe 19 (Präsenzaufgabe). *Ein Hauch von Pivotierung*

Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Permutationsmatrix, die den k -ten und p -ten Eintrag eines Vektors vertauscht, wobei $p > k$ gelte.

(1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bestimmen Sie PA sowie AP .

(2) Sei nun $j < k$, $L = I_n - l_j e_j^T$ mit dem kanonischen Basisvektor $e_j \in \mathbb{R}^n$ und einem Vektor $l_j = [0, \dots, 0, l_{j+1,j}, \dots, l_{n,j}]^T$. Zeigen Sie, dass ein Vektor

$$\hat{l}_j = [0, \dots, 0, \hat{l}_{j+1,j}, \dots, \hat{l}_{n,j}]^T$$

existiert, sodass mit $\hat{L} = I_n - \hat{l}_j e_j^T$ die Identität $\hat{L} = PLP$ gilt.

Aufgabe 20 (4 Punkte). *Gauß mit Pivotsuche*

Verwenden Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren mit Pivotsuche zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie auch die entsprechende PLU -Zerlegung von A .

Aufgabe 21 (4 Punkte). *Permutationen*

Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die zur Bijektion $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ gehörende Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass $P^T = P^{-1}$ und

$$P^{-1} = [e_{\pi^{-1}(1)}, \dots, e_{\pi^{-1}(n)}],$$

wobei $\{e_k\}$ die kanonischen Basisvektoren sind.

Aufgabe 22 (4 Punkte). *Noch ein Hauch von Pivotierung*

Für $k = 1, 2, \dots, n-1$ sei $L^{(k)} = I_n - l_k e_k^T$ mit Vektoren $l_k = [0, \dots, 0, l_{k+1,k}, \dots, l_{n,k}]^T$ und es sei $\tilde{L} = L^{(n-1)} L^{(n-2)} \dots L^{(1)}$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{L}^{-1} = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_k^T.$$

Aufgabe 23 (4 Punkte).

Seien $A \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie zeichnerisch mit Hilfe eines Geodreiecks die Lösung des Ausgleichsproblems, indem Sie b orthogonal in Vektoren v, w mit $v \in \text{Im}A$ und $w \in \ker A^\top$ zerlegen.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.