

Numerik 1

Blatt 6

Abgabe: 18. Januar 2018

Singulärwertzerlegung, Eigenwerte

Aufgabe 29 (Präsenzaufgabe).

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass aus $Av_i = Bv_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$ die Gleichheit $A = B$ folgt.

Aufgabe 30 (4 Punkte). *Singulärwertzerlegung*

Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Berechnen Sie A^+ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$. Verwenden Sie A^+ , um das durch A und $b = [4, 1, 2, 3]^T$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 31 (4 Punkte). *Moore-Penrose Inverse*

- (1) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und V^\perp sein orthogonales Komplement. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Matrix $P_V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit $P_V v = v$ für alle $v \in V$ und $P_V w = 0$ für alle $w \in V^\perp$.
- (2) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass $A^+ A = P_{(\ker A)^\perp}$ und $AA^+ = P_{\text{Im} A}$.

Aufgabe 32 (4 Punkte). *Diagonalisierung*

Seien $(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$, Eigenwerte und zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass A die Darstellung $A = V D V^{-1}$ mit $V = [v_1, \dots, v_n]$ und $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ besitzt.

Aufgabe 33 (4 Punkte). *Eigenwerte und Minimierung*

- (1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2, \dots, \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 . Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max \left\{ \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \cdot v_1 = 0 \right\}.$$

- (2) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix A ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}.$$

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.