

Praktikum zu Numerik 1

Blatt 6

Abgabe: 1. Februar 2018

Approximation von Eigenwerten

Aufgabe 14 (8 Punkte). *Potenzmethode*

Implementieren Sie die von-Mises-Potenzmethode, um den kleinsten und größten Eigenwert sowie die zugehörigen Eigenvektoren der $n \times n$ -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

für $n = 4, 16, 64, 256$ zu approximieren. Benutzen Sie für die inverse Iteration das MATLAB-Kommando $x = B \setminus c$ zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Bx = c$. Verwenden Sie unterschiedliche Startvektoren und ein geeignetes Abbruchkriterium für die Iteration und bestimmen Sie die Fehler der Approximationen mit Hilfe der exakten Werte $\lambda_{\min} = 2 - 2 \cos(\pi/(n+1))$, $\lambda_{\max} = 2 + 2 \cos(n\pi/(n+1))$.

Aufgabe 15 (8 Punkte). *QR-Methode*

Verwenden Sie die MATLAB-Routine $[Q, R] = \text{qr}(A)$, um das QR-Verfahren zu implementieren und beenden Sie die Iteration, falls $\|A_k - A_{k+1}\|_2 / \|A_k\|_2 \leq 10^{-5}$ gilt. Was wären andere sinnvolle Abbruchkriterien? Approximieren Sie mit Ihrem Programm die Eigenwerte der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n = 4, 10, 20$ und $B, B^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definiert durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 29 \\ -2 & -4 & 18 \\ -1 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

und diskutieren Sie die Voraussetzungen des Satzes über die Konvergenz des Verfahrens (Bartels, Satz 8.6) anhand dieser Beispiele.