Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. P. Dondl
M.Sc. J. Gerstenberger

12.12.2018

Übung zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

WS 2018/19 — Blatt 9

Aufgabe 1 (Cauchy-Folgen) (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 2 (Wachstumsverhalten) (5 Punkte)
Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = k^n \exp(-n).$$

Aufgabe 3 (Konvergenzordnung) (5 Punkte)
Eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert x hat Konvergenzordnung p, wenn ein $c > 0$ existiert, so dass gilt

$$|x_{n+1} - x| \le c|x_n - x|^p\,, \qquad n = 1, 2, 3, \dots\ .$$

(i) (Division durch Multiplikation) Es sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit beliebigen $x_0 \in (0, \frac{2}{a})$ und

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$$

ab $n = 1$ monoton wächst und quadratisch ($p = 2$) gegen $\frac{1}{a}$ konvergiert.

Berechnen Sie die ersten drei Folgenglieder für $a = 3$ und $x_0 = 0.3$.

(ii) (Heron-Verfahren, Wurzeln ziehen) Es sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit beliebigen $x_0 > 0$ und

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + \tfrac{a}{x_n})$$

ab $n = 1$ monoton fällt und quadratisch ($p = 2$) gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Berechnen Sie die ersten drei Folgenglieder für $a = 9$ und $x_0 = 4$.

Hinweis: Das Bisektionsverfahren liefert einen Algorithmus mit linearer ($p = 1$) Konvergenz.

Abgabe: 19.12.2018, 15:30 Uhr (Briefkästen, Gebäude 51).