Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. P. Dondl
M.Sc. J. Gerstenberger

19.12.2018

Übung zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

WS 2018/19 — Blatt 10

Aufgabe 1 (Nullstellen) (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindesten eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 2 (Ein anderer Zwischenwertsatz) (5 Punkte)
Es seien f und g zwei stetige, reellwertige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ mit $f(a) \le g(a)$ und $f(b) \ge g(b)$. Zeigen Sie, dass die Graphen von f und g sich an mindestens einem Punkt schneiden.

Aufgabe 3 (Stetigkeit) (5 Punkte)
Die Sägezahnfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $s(x) = |\lfloor x + 1/2 \rfloor - x|$, wobei $\lfloor\cdot\rfloor$ die Abrundefunktion ist. Zeichnen Sie den Graphen von s und zeigen Sie:

(i) Für $|x| \le 1/2$ gilt $s(x) = |x|$.

(ii) $s(x + k) = s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Die Funktion $s(x)$ ist stetig.

Bonusaufgaben

Aufgabe 1 (Induktion) (5 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die folgenden Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen, Konvergenz) (5 Punkte)
Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge mit Grenzwert z. Zeigen Sie, dass die komplex-konjugierte Folge $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\overline{z}$ konvergiert.

Aufgabe 3 (Reihen) (5 Punkte)
Finden Sie den Fehler in der folgenden Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2^n - 1}{2^n}\right) + \dots \\
&= (1 + 1) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(-\frac{3}{4} + 1\right) + \dots + \left(-\frac{2^n - 1}{2^n} + 1\right) + \dots \\
&= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 3
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Differenzierbarkeit) (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest
und einen guten Rutsch ins neue Jahr

Abgabe: 09.01.2019, 15:30 Uhr (Briefkästen, Gebäude 51).