

Übung zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

WS 2018/19 — Blatt 12

Aufgabe 1 (Unter- & Obersumme)

(5 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Wir betrachten die Zerlegung $Z_n = (\frac{0}{n}a, \frac{1}{n}a, \dots, \frac{n}{n}a)$ des Intervalls $[0, a]$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für die Funktion $f(x) = x^2$, dass die Ober- und die Untersummen gegen den gemeinsamen Grenzwert $\frac{a^3}{3}$ konvergieren.

Aufgabe 2 (Integrieren)

(5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale (mit detaillierten Rechenweg!):

(i) $\int_0^\pi x \cos x \, dx$,

(ii) $\int_1^e \frac{\log(x^3)^2}{3x} \, dx$,

(iii) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x} \, dx$, (Substitution mit $y = \tan \frac{x}{2}$).

Aufgabe 3 (Integrieren II)

(5 Punkte)

(i) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 2$ und $y = 0$ begrenzt wird.

(ii) Eine Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$ ist gegeben durch die Menge

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}.$$

Bestimmen Sie den von E eingeschlossenen Flächeninhalt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst auf $(-1, 1)$, dass $F(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist.

Abgabe: 23.01.2019, 15:30 Uhr (Briefkästen, Gebäude 51).