Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. P. Dondl
M.Sc. J. Gerstenberger

23.01.2019

Übung zur Vorlesung

Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

WS 2018/19 — Blatt 13

Aufgabe 1 (Uneigentliche Integrale) (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, falls sie existieren bzw. geben Sie an für welche Wahl der Parameter sie existieren:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Integration) (5 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist.

(ii) Seien $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass

$$\int_a^b \tan^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \left[x\tan^{-1}(x) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{x=a}^{x=b}.$$

Aufgabe 3 (Rotationskörper) (5 Punkte)

(i) Berechnen Sie das Volumen des Rotationsk|örpers, welcher durch die Rotation des Graphen von $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to [0, \infty)$, $f(x) = \tan(x)$ um die x-Achse ensteht.
Hinweis: *Integrieren Sie über die kreisförmigen Flächeninhalte der vertikalen Schnittflächen.*

(ii) Sei $g : [a, b] \to [0, \infty)$ stetig und streng monoton. Argumentieren Sie mit Hilfe einer Skizze, dass das Volumen, welches durch Rotation des Graphen von g um die y-Achse entsteht und durch die beiden Geraden $y = g(a)$ und $y = g(b)$ begrenzt wird, gegeben ist durch

$$V_g = \pi \int_{g(a)}^{g(b)} (g^{-1}(y))^2\,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Se mit einer geeigneten Transformation, dass $V_g = \pi \int_a^b g'(x)x^2\,\mathrm{d}x$ gilt.

Abgabe: 30.01.2019, 15:30 Uhr (Briefkästen, Gebäude 51).