Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. P. Dondl
M.Sc. J. Gerstenberger

06.02.2019

Übung zur Vorlesung

# Mathematik für Ingenieure und Informatiker I

WS 2018/19 — Klausurvorbereitung

**Von den folgenden vier Aufgaben wird eine in der Klausur gestellt.**

**Aufgabe 1**
Die poisitive Zahl $g$ welche $g = 1 + \frac{1}{g}$ erfüllt, heißt goldener Schnitt.

(i) Bestimmen Sie $g$.

(ii) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, gegeben durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$|x_n - g| \leq \frac{1}{g^n}\,.$$

***Hinweis:*** *Vollständige Induktion.*

(iii) Zeigen Sie, dass gilt $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$.

**Aufgabe 2**
Berechnen Sie die folgenden Integrale und geben Sie Ihre Zwischenschritte an.

(i) $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1+x)^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x\,,\quad n,m\in\mathbb{N},$

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,\quad a>1.$

**Aufgabe 3**

(i) Gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,?$$

(ii) Konvergiert oder divergiert

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

für $n\to\infty$?

Beweisen Sie Ihre Aussagen.

**Aufgabe 4**

(i) Geben Sie das Taylor-Polynom dritten Grades für die Funktion $x \mapsto \ln(1 + \sin x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(ii) Geben Sie die Taylor-Reihe für die Funktion $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(iii) Berechenen Sie $\ln(1{,}1)$ näherungsweise durch das quadratische Taylorpolynom von $\ln x$ an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mit Hilfe des Restgliedes ab.

**Die beiden folgenden Aufgaben dienen als Beispiele für weitere Klausuraufgaben.**

**Aufgabe 5**
Zeigen Sie, dass die folgende Funktion stetig differenzierbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 6**

(i) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ und in Polarkoordinaten (d.h. in der Form $r \cdot \mathrm{e}^{i\phi}$ für $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$) dar.

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \qquad (1+i)\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,.$$

(ii) Zeigen Sie, dass zwie komplexe Zahlen $z_1, z_2$ genau dann beide zueinander konjugiert (d.h. $z_1 = a + ib$, $z_2 = a - ib$ für reelle $a$,$b$) oder beide reell sind, wenn sowohl $z_1 + z_2$ als auch $z_1 \cdot z_2$ reelle Zahlen sind.