ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
ABTEILUNG FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
PROF. DR. PATRICK DONDL WINTERSEMESTER 2018

Numerik 1

Blatt 1

Abgabe: 6. November 2018

Aufwand und Matrizen

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe). *Aufwand*

Bestimmen Sie die Größenordnung des Aufwands für die Matrix-Vektor-Multiplikation, die Matrix-Matrix-Multiplikation sowie die Bestimmung der Determinante einer Matrix mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe). *Das Alter des Universums*

Ein Rechner arbeite mit 10^9 Gleitkommaoperationen pro Sekunde und es seien drei Algorithmen mit Aufwand $\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n^3)$ bzw. $\mathcal{O}(n!)$ zur Lösung derselben Aufgabe gegeben.
Wieviele Sekunden, Stunden, Tage oder Jahre benötigen die Algorithmen etwa für die Problemgrößen $n = 10^k$ mit $k = 1, 2, \ldots 6$?

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe). *Gruppeneigenschaften*

Zeigen Sie, dass die invertierbaren (bzw. normalisierten) unteren Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, d.h. sind $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere Dreiecksmatrizen mit $\det L_i \neq 0$ (bzw. $(L_i)_{jj} = 1$ für $j = 1, \ldots, n$), so sind L_0^{-1} und $L_1 L_2$ ebenfalls invertierbare (bzw. normalisierte) untere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe). *Kern, Bild, Rang*

(1) Zeigen Sie, dass $(\operatorname{im} A^T)^\perp = \ker A$ mit
$$V^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = 0 \text{ für alle w} \in V\}$$
(2) Beweisen Sie die Dimensionsformel $n = \dim(\operatorname{im} A) + \dim(\ker A)$ und folgern Sie, dass $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$, wobei für eine Matrix M der Spaltenrang von M durch $\operatorname{rank} M = \dim(\operatorname{im} M)$ definiert ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** *Rücksubstitution*

Berechnen Sie die Größenordnung des Aufwands zur Lösung eines linearen Gleichunssystems mit $n \times n$ oberer Dreiecksmatrix.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** *Eine Richtung ist sehr einfach*

Zeigen Sie, dass gilt $\ker A^T A = \ker A$.

Hinweis: Betrachten Sie Aufgabe 4.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** *Diagonaldominante Matrizen*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine strikt diagonaldominante Matrix, d.h. es gelte

$$\sum_{j=1,\dots,n,\ j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(1) Zeigen Sie, dass die Teilmatrizen $A_k := (a_{ij}), 1 \le i, j \le k$, für $k = 1, 2, \dots, n$ ebenfalls strikt diagonaldominant sind.
(2) Zeigen Sie, dass die Matrix A regulär ist.

Hinweis: Zeigen Sie zum Nachweis von (2), dass der Kern von A der Nullraum ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** *Schurkomplement*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $1 \le m \le n$, sodass die obere linke $m \times m$-Teilmatrix $A_{11} = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ ebenfalls regulär ist. Sei A zerlegt gemäss

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Schurkomplement $S := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ regulär ist und, dass A^{-1} gegeben ist durch

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Für den ersten Teil bemerken Sie, dass

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & S \end{bmatrix}$$

und benutzen die Determinantenformel für eine Blockdreiecksmatrix.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.