Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl Wintersemester 2018

Numerik 1

Blatt 2

Abgabe: 20. November 2018

Mehr lineare Algebra

Aufgabe 9 (Präsenzaufgabe). *Haben wir da nicht einen Satz?*

Zeigen Sie, dass

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ keine normalisierte (d.h. mit $L_{11} = L_{22} = 1$) LU-Zerlegung und

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ keine Cholesky-Zerlegung besitzt.

Aufgabe 10 (4 Punkte). $A_k = L_k U_k$

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eine untere Dreiecksmatrix L sowie eine obere Dreiecksmatrix U mit $A = LU$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $k = 1, 2, \ldots, n$ und die linken, oberen $k \times k$-Teilmatrizen A_k, L_k und U_k von A, L beziehungsweise U ebenfalls die Zerlegung $A_k = L_k U_k$ gilt.

Aufgabe 11 (4 Punkte). *Symmetrische Matrizen und Bandmatrizen*

(a) Wie lässt sich die LU-Zerlegung im Fall symmetrischer Matrizen vereinfachen und welcher Aufwand ergibt sich?

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix mit Bandweite m, d.h. es gelte $a_{ij} = 0$ falls $|i - j| > m$. Wie groß ist der Aufwand der Berechnung der LU-Zerlegung, sofern diese existiert?

Aufgabe 12 (4 Punkte). *Eigenschaften der Operatornorm*

Seien $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ und sei $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) $\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup_{\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_n = 1\}} \|Ax\|_m = \inf\{c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \ \|Ax\|_m \le c\|x\|_n\}$.

(c) Für $A \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $\|x\|_n \le 1$ und $\|Ax\|_m = \|A\|_{\mathrm{op}}$ folgt $\|x\|_n = 1$.

(d) Das Infimum und das Supremum in (b) werden angenommen.

Aufgabe 13 (4 Punkte). *Die induzierten l^p-Matrixnormen*

(b) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|x\|_p$ die l^p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|A\|_p$ die dazugehörige induzierte Matrixnorm auf $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \|A\|_\infty$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Abschätzungen

$$n^{-1/2}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le n^{1/2}\|A\|_2$$

$$n^{-1}\|A\|_\infty \le \|A\|_1 \le n\|A\|_\infty$$

gelten und geben Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, die zeigen, dass sich die Abschätzungen nicht verbessern lassen (d.h. für jede dieser vier Ungleichungen und jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ finden Sie ein A, sodass Gleichheit gilt).

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.