Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl

Wintersemester 2018

**Numerik 1**
Blatt 3
Abgabe: 4. Dezember 2018
*Matrixnormen*

**Aufgabe 14** (Präsenzaufgabe). *Permutationen*
Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Bijektion $\pi : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ gehörende Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass $P^T = P^{-1}$ und

$$P^{-1} = [e_{\pi^{-1}(1)}, \dots, e_{\pi^{-1}(n)}],$$

wobei $\{e_k\}$ die kanonischen Basisvektoren sind.

**Aufgabe 15** (4 Punkte). *Die Frobeniusnorm*
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch $\|A\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|^2$.
Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}.$$

Folgern Sie, dass die Frobeniusnorm mit der von der Euklidischen Norm induzierten Operatornorm verträglich ist in dem Sinne, dass

$$\|A\|_2 \le \|A\|_{\mathcal{F}} \le \sqrt{n}\|A\|_2.$$

[Sie dürfen dazu die Identität $\operatorname{tr}(A^T A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ mit den (wohlgemerkt nichtnegativen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $A^T A$ verwenden.]

**Aufgabe 16** (4 Punkte). *Auslöschungseffekte*
Wie lassen sich Auslöschungseffekte bei der praktischen Berechnung der Ausdrücke

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x}, \quad \frac{e^x - 1}{x}$$

für $x \neq 0$ mit $|x| << 1$ vermeiden?

**Aufgabe 17** (4 Punkte). *Ein Hauch von PLU*
Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Permutationsmatrix, die den $k$-ten und $p$-ten Eintrag eines Vektors vertauscht, wobei $p > k$ gelte.

(1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimmen Sie $PA$ sowie $AP$.
(2) Sei nun $j < k$, $L = I_n - l_j e_j^T$ mit dem kanonischen Basisvektor $e_j \in \mathbb{R}^n$ und einem Vektor $l_j = [0, \dots, 0, l_{j+1,j}, \dots, l_{n,j}]^T$. Zeigen Sie, dass ein Vektor

$$\hat{l}_j = [0, \dots, 0, \hat{l}_{j+1,j}, \dots, \hat{l}_{n,j}]^T$$

existiert, sodass mit $\hat{L} = I_n - \hat{l}_j e_j^T$ die Identität $\hat{L} = PLP$ gilt.

**Aufgabe 18** (4 Punkte). *Von Hand*
Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren *ohne* Pivotsuche zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 16 & -4 & 3 \\ -3 & 20 & -22 & 0 \\ 1 & -16 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -24 \\ -45 \\ 20 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie auch die $LU$-Zerlegung von $A$.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.