Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl

Wintersemester 2018

Numerik 1

Blatt 4

Abgabe: 18. Dezember 2018

PLU Zerlegung und Ausgleichsprobleme

Aufgabe 19 (Präsenzaufgabe). *Minimierung*

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung

$$t \mapsto \|A(x+ty)-b\|_2^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

und folgern Sie die Gaußsche Normalengleichung, falls x eine Lösung des zugehörigen Ausgleichsproblems ist.

Aufgabe 20 (4 Punkte). *PLU*

Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren *mit* Pivotsuche zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie auch die PLU-Zerlegung von A.

Aufgabe 21 (4 Punkte). *Gewichtete Messwerte*

Sei $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen. Die Minimierung von $x \mapsto \|D(Ax-b)\|_2^2$ realisiert beispielsweise eine unterschiedliche Gewichtung verschiedener Messergebnisse. Bestimmen Sie die zugehörige Normalengleichung.

Aufgabe 22 (4 Punkte). *Householder*

Eine Householder-Matrix $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ definiert durch $P = \mathrm{Id}_m - 2vv^T$.

(1) Zeigen Sie, dass $P = P^T$ und $P^{-1} = P$ gelten.
(2) Zeigen Sie, dass eine reelle $m \times m$ Householder-Matrix sowohl einen $(m-1)$-dimensionalen Eigenraum mit dem Eigenwert 1 als auch einen einfachen Eigenwert -1 hat.
(3) Konstruieren Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen für $m = 2, 3$ eine Householder-Matrix, die einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ auf ein Vielfaches von $e_1 \in \mathbb{R}^m$ abbildet.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.