ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
ABTEILUNG FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
PROF. DR. PATRICK DONDL

WINTERSEMESTER 2018

Numerik 1

Blatt 5

Abgabe: 15. Januar 2018

SVD etc.

Aufgabe 23 (Präsenzaufgabe). *Singulärwertzerlegung*

Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Berechnen Sie A^+ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$. Verwenden Sie A^+, um das durch A und $b = [4,1,2,3]^T$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 24 (4 Punkte). *Cholesky again*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A = QR$ eine QR-Zerlegung. Zeigen Sie, dass R eine Cholesky-Zerlegung von A^TA definiert.

Aufgabe 25 (4 Punkte). *QR*

Bestimmen Sie mit Hilfe passender Householder-Transformationen eine QR-Zerlegung für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 8 & 11 \end{bmatrix},$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = (1,1,1)^T$.

Aufgabe 26 (4 Punkte). *Moore-Penrose Inverse*

(1) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $V^\perp$ sein orthogonales Komplement. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Matrix $P_V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $P_V v = v$ für alle $v \in V$ und $P_V w = 0$ für alle $w \in V^\perp$.

(2) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $A^+A = P_{(\ker\, A)^\perp}$ und $AA^+ = P_{\mathrm{ImA}}$.

Aufgabe 27 (4 Punkte). *Diagonalisierung*

Seien $(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, i = 1,\dots,n$, Eigenwerte und zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A die Darstellung $A = VDV^{-1}$ mit $V = [v_1,\dots,v_n]$ und $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ besitzt.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.