Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl Wintersemester 2018

Numerik 1
Blatt 6
Abgabe: 29. Januar 2019
Eigenwerte

Aufgabe 32 (Präsenzaufgabe)**.** *QR*
Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch, bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** *Eigenwerte und Minimierung*

(1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2, \ldots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max\left\{ \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \cdot v_1 = 0 \right\}.$$

(2) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix A ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}.$$

Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** *Gerschgorin*

(1) Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

(2) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strikt diagonaldominant und symmetrisch. Geben Sie eine obere Schranke der Konditionszahl $\mathrm{cond}_2(B)$ an.

Aufgabe 35 (4 Punkte)**.** *Potenzmethode*

(1) Zeigen Sie, dass die Potenzmethode auch dann konvergiert, wenn die Iterierten bezüglich einer anderen Norm normiert werden.

(2) Führen Sie fünf Schritte der Potenzmethode für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} und B = \begin{pmatrix} -6 & -22 & 59 \\ -4 & -6 & 22 \\ -2 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

mit dem Anfangsvektor $x = (1, 1, 1)^T$ durch und beobachten Sie die Größen $||\tilde{x}_k||_2$ und (x_k, Ax_x).

Aufgabe 36 (4 Punkte)**.** *Charakteristisches Polynom*

Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + +a_1\lambda + a_0).$$

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.