Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl Wintersemester 2018

Numerik 1
Extrablatt
(Abgabe: 15. Januar 2018)

Zusatzpunkte

Aufgabe 28 (4* Punkte). *Rücksubstitutionsalgorithmus*

Für eine gegebene reguläre obere Dreiecksmatrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, schreiben Sie den Rücksubstitutionsalgorithmus aus der Vorlesung als eine Hintereinanderausführung elementarer Rechenoperationen:

$$\tilde{\Phi} = f_J \circ f_{J=1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1.$$

Aufgabe 29 (4* Punkte). *Positiv-definite Matrizen*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv-definite Matrix, d.h., es gelte $(x, Ax) > 0$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass A regulär ist.
(b) Zeigen Sie, dass für $1 \leq k \leq n$ auch jede $k \times k$-Untermatrix $A_k = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ regulär ist.
(c) Zeigen Sie, dass alle reellen Eigenwerte von A positiv sind.

Aufgabe 30 (4* Punkte). *Ich kenne mich mit Fußball leider auch nicht aus*

(a) Sei $n \in N$ ungerade und $Q \in SO(n)$. Zeigen Sie, dass Q den Eigenwert 1 besitzt.
(b) Folgern Sie, dass es auf der Oberfläche eines Fußballs mindestens zwei Punkte gibt, die sich im Laufe eines Fußballspiels mindestens zweimal an derselben Stelle des umgebenden Raumes befinden.

Aufgabe 31 (4* Punkte). *Eigenwerte und Minimierung*

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2, \ldots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max\left\{\frac{x^T A x}{\|x\|_2^2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \cdot v_1 = 0\right\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix A ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^T A x}{\|x\|_2^2}.$$