

Mathematik I für Studierende der Informatik und der Ingenieurwissenschaften

im Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 10

Wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, kann man deren Glieder als Näherungswerte von x interpretieren. Je schneller die Konvergenz ist, desto weniger Glieder braucht man für eine gute Approximation. Eine Möglichkeit für Definition der Geschwindigkeit der Konvergenz liefert die Konvergenzordnung:

Eine konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert x hat *Konvergenzordnung* p , wenn ein $c > 0$ existiert, so dass gilt

$$|x_{n+1} - x| \leq c|x_n - x|^p, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

In der Aufgabe 1 lernen wir Algorithmen für den Kehrwert und die Wurzel kennen, die beide quadratisch konvergieren. Zum Vergleich: Das Bisektionsverfahren vom Blatt 8 liefert einen Algorithmus mit linearer ($p = 1$) Konvergenz.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik I für Info. und Ing.“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Mittwoch, der 15. Januar 2020, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite **Ihre Namen** und **Ihre Gruppe** und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. (a) Es sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, rekursiv gegeben durch

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n),$$

für beliebiges $x_0 \in (0, \frac{2}{a})$ ab $n = 1$ monoton wächst und quadratisch ($p = 2$) gegen $\frac{1}{a}$ konvergiert.

Berechnen Sie die ersten drei Folgenglieder für $a = 3$ und $x_0 = 0.3$.

- (b) (Heron-Verfahren) Es sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

für beliebiges $x_0 > 0$ ab $n = 1$ monoton fällt und quadratisch ($p = 2$) gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Berechnen Sie die ersten drei Folgenglieder für $a = 9$ und $x_0 = 4$.

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls vorhanden):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n},$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{-2n^2 - (-1)^n},$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5^{n+1}}{2^n + 5^n},$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n^2 - 2n + 10}{n^3 + 3n^2 - 8}}{\frac{2n + 15}{4n^2 - n + 1}}.$

3. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen Sie, dass aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

folgt, dass auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a.$$

Finden Sie ein Gegenbeispiel für die umgekehrte Implikation.

4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[10]{n}}{0,0003^n},$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^{n+2} + 6^{n+4}}{3^n + 5^{n-2} + 7^{n-4}},$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2020}\right)^n.$