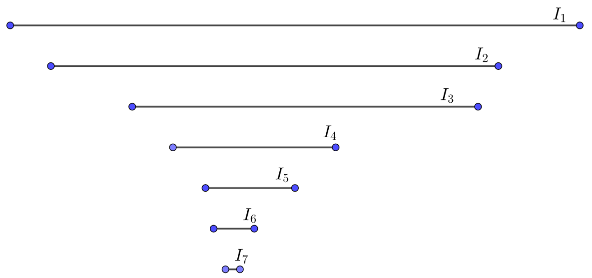
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik I für Studierende der Informatik und der Ingenieurwissenschaften

im Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 11

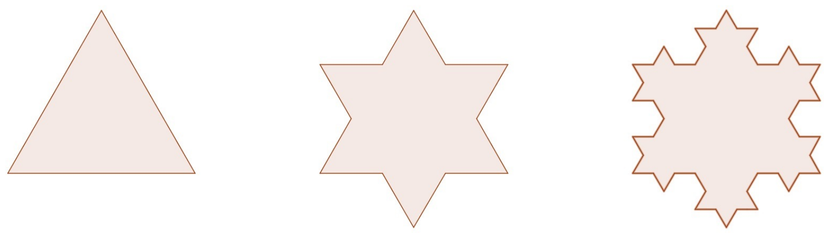


Das Resultat aus der Aufgabe 3 wird das Intervallschachtelungsprinzip genannt. Wenn wir eine fallende Folge (d. h., jedes Glied ist in seinem Vorgänger enthalten) von endlichen abgeschlossenen Intervallen haben, und wenn deren Längen gegen 0 konvergieren, dann gibt es genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen (und somit in ihrer Schnittmenge) liegt.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik I für Info. und Ing.“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Mittwoch, der 22. Januar 2020, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite **Ihre Namen** und **Ihre Gruppe** und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Bestimmen Sie den Umfang und den Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke. Sie entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit Seite 1, indem in jedem Schritt alle Seiten dreigeteilt werden und ein gleichseitiges Dreieck mit passender Seite hinzugefügt wird. (Im Bild sind das ursprüngliche Dreieck und die ersten zwei Schritte zu sehen.)



2. Entscheiden Sie, ob die jeweils definierte Funktion f im Punkt x_0 stetig ergänzt werden kann. In anderen Worten, bestimmen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, und falls ja, berechnen Sie ihn:

(a) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3-1}{(x-1)^3}, \quad x_0 = 1,$

(b) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\exp(x)-1}{x}, \quad x_0 = 0,$

(c) $f\colon (-\infty, 1) \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}, \quad x_0 = -1,$

(d) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+\exp(\frac{1}{x})}, \quad x_0 = 0.$

3. Beweisen Sie Folgendes: Es seien $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, Intervalle mit

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und zwar gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

4. Es sei M eine beliebige Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Ein Punkt $m \in M$ heißt ein Fixpunkt von f, falls $f(m) = m$ ist. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ besitzt einen Fixpunkt.

(b) Jede Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ besitzt einen Fixpunkt.

(c) Jede stetige Funktion $f : (0, 1) \to (0, 1)$ besitzt einen Fixpunkt.

(d) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt einen Fixpunkt.

(e) Es gibt eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$, die genau zwei Fixpunkte besitzt.

Hinweis: Versuchen Sie, den Zwischenwertsatz anzuwenden.