Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

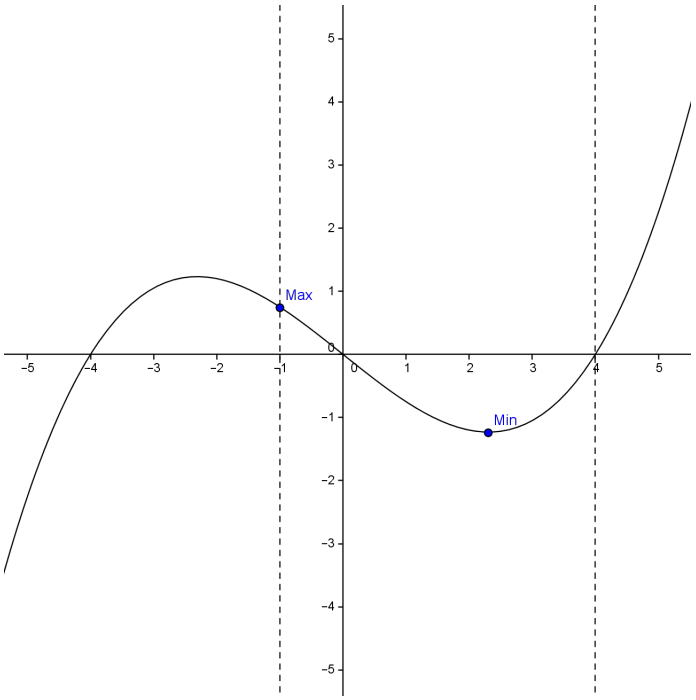
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik I für Studierende der Informatik und der Ingenieurwissenschaften

im Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 12

Die Ableitung ist ein wichtiges Mittel für die Berechnung der Extrema einer Funktion. Dabei darf man aber nicht vergessen, das Verhalten auf dem Rand des betrachteten Intervalls zu beobachten. So besitzt das Polynom $p(x) = \frac{(x-4)x(x+4)}{20}$ stationäre Punkte $\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$, nimmt aber auf ganz $\mathbb{R}$ weder ein Minimum noch ein Maximum an, weil $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$. Ähnliches kann auch bei einem beliebigen nicht kompakten Intervall geschehen. Beschränkt man sich auf ein kompaktes Intervall, so gibt es nach dem Zwischenwertsatz die beiden Extrema. Für das Intervall $[-1, 4]$ liegt das Maximum auf dem Rand und das Minimum im Inneren im stationären Punkt.



Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik I für Info. und Ing.“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Mittwoch, der 29. Januar 2020, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite **Ihre Namen** und **Ihre Gruppe** und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Berechnen Sie die Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I der maximale Definitionsbereich ist.

(a) $f(x) = \tan(x)$,

(b) $f(x) = x^x$,

(c) $f(x) = \log(\alpha \exp(x)),\ \alpha \in \mathbb{R}$,

(d) $f(x) = \exp(\frac{1}{x^2+1})$,

(e) $f_n(x) = \underbrace{\log(\log(\dots\log}_{n\text{-mal}}(x)\dots)),\ n \in \mathbb{N}$.

2. Die hyberbolische Kosinusfunktion (oder der Kosinus hyperbolicus) ist gegeben durch $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = a\cosh(\frac{x-x_0}{a}) + y_0$ mit $a \neq 0$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$(y - y_0)y'' - (y')^2 = 1.$$

3. (a) Eine Konservendose mit 850 ml Inhalt soll so gebaut werden, dass der Blechverbrauch minimal ist. Wir vernachlässigen Materialstärke und Falznähte und nehmen an, dass es sich bei der Dose um einen einfachen Zylinder mit Radius r und Höhe h handelt. Welchen Radius und welche Höhe hat die optimale Dose? Vergleichen Sie ihre gefundenen Werte mit den Maßen einer Dose aus dem Supermarkt.

Hinweis: Stellen Sie zuerst die Höhe als Funktion des Radius dar.

(b) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2e^x - 2xe^x - \frac{1}{3}x^3 + 2x + 5$$

und das Maximum und Minimum von f im Intervall $[-2, 2]$.

4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{31}}{e^{x^2}}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin(2x)\cot(4x)$.