Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

# Mathematik I für Studierende der Informatik und der Ingenieurwissenschaften

im Wintersemester 2019/20

## Übungsblatt 3

Nun haben wir verschiedene Zahlen kennengelernt: die natürlichen, die ganzen und die rationalen (die Brüche). Die letzteren bilden einen Körper, wir können sie anordnen, es gibt aber noch „Lücken“ zwischen ihnen. In der Vorlesung wurde so gezeigt, dass die Diagonale eines Quadrats mit Seite 1 (also $\sqrt{2}$) nicht rational ist, dies gilt auch für den Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1. (Sie erkennen diese Zahl auf dem Bild.) Diesen Mangel beheben die reellen Zahlen, die das Vollständigkeitsaxiom erfüllen: Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke (ein Supremeum).

### Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik I für Info. und Ing.“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Mittwoch, der 13. November 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite **Ihre Namen** und **Ihre Gruppe** und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

**1.** Es seien $M$ und $N$ zwei beliebige Mengen.

(a) Beweisen Sie, dass für alle Abbildungen $f : M \to N$ und alle Teilmengen $U, U' \subset M$ und $V, V' \subset N$ gilt:

$$f^{-1}(V \cup V') = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(V'),$$
$$f(U \cap U') \subset f(U) \cap f(U').$$

(b) Zeigen Sie, dass es sich in der zweiten Zeile um eine Gleichheit der Mengen handelt, falls $f$ injektiv ist, und geben Sie ein Beispiel an, wo $f(U \cap U')$ eine echte Teilmenge von $f(U) \cap f(U')$ ist.

**2.** Zeigen Sie nur mit Hilfe der in der Vorlesung eingeführten Rechenregeln, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen gelten.

(a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$,

(b) $a = -(-a)$,

(c) $(-a) \cdot a = -a^2$,

(d) $a^2 = (-a)^2$.

Geben Sie in jeder Zeile an, welche Regel Sie verwendet haben.

**3.** Gegeben seien die Intervalle $I_1 = [-2, \infty)$ , $I_2 = (-1, 4]$, $I_3 = (-5, 3)$. Bestimmen Sie die folgenden Mengen (und geben Sie diese als Vereinigung einer möglichst geringen Zahl von Intervallen an).

(a) $J_1 = (I_1 \cap I_3) \setminus I_2$,

(b) $J_2 = \mathbb{R} \setminus (I_2 \cup I_3)$,

(c) $J_3 = I_2 \setminus I_3$.

Geben Sie für $i = 1, 2, 3$ jeweils $\sup J_i$ und $\inf J_i$ an. Welche dieser Mengen sind (von oben bzw. von unten) beschränkt?

**4.** (a) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

(b) Schreiben Sie die linke Seite der Gleichung mit dem Summenzeichen um (wie z.B. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$).