

Mathematik I für Studierende der Informatik und der Ingenieurwissenschaften

im Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 5

Das Thema dieses Blattes sind Vektoren, also Elemente von $\mathbb{R}^n$. Wir kennen zwei sehr anschauliche Verknüpfungen: Addition und Multiplikation mit einem Skalar. Wir können die Länge eines Vektors und den Winkel zwischen zweier Vektoren ausrechnen. Beides hängt mit dem Skalarprodukt zusammen. In Dimension 3 gibt es noch das Vektorprodukt, dass (wie der Name besagt) einen Vektor liefert, der orthogonal auf beiden Faktoren ist.

In $\mathbb{R}^2$ kann man ein Produkt einführen, dass (zusammen mit der Addition) sogar alle Körperaxiome (wie $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) erfüllt. Mit diesem Produkt versehen, bezeichnet man diesen Raum $\mathbb{C}$ und spricht von komplexen Zahlen. Auf natürlicher Weise kann man $\mathbb{R}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Man vereinfacht die Darstellung durch die Einführung der imaginären Einheit i , die $i^2 = -1$ erfüllt.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik I für Info. und Ing.“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Mittwoch, der 27. November 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite **Ihre Namen** und **Ihre Gruppe** und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ seien durch $a = (-1, 2, -2)^\top$ und $b = (-2, 1, 2)^\top$ gegeben.
 - (a) Skizzieren Sie a und b .
 - (b) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
 - $|3a - 2b|$,
 - $\langle -3a, b \rangle$,
 - $(a + 2b) \times (-5b)$.
 - (c) Sind a und b orthogonal zueinander? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. (a) Gegeben seien die Vektoren $x = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})^\top$ und $y = (2, -4)^\top$. Bestimmen Sie den Winkel, der von x und y eingeschlossen wird.
 - (b) Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$. Wir definieren die Abbildung $\varphi_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_v(x) = x - 2\langle x, v \rangle v.$$

Skizzieren Sie auf einem Bild das Verhältnis zwischen v , x und $\varphi_v(x)$ und beschreiben Sie die Wirkung dieser Abbildung geometrisch.

3. (a) Weisen Sie das Assoziativgesetz der Multiplikation sowie das Distributivgesetz für komplexe Zahlen nach.
- (b) Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $a = 3 - i$ und $b = -4 + 2i$ die folgenden Ausdrücke:
- $-a + b$,
 - $(a + \bar{b})^2$,
 - $-2i(ia - 5b)$,
 - $\bar{a}(4i + \bar{b})$,
 - $\left| \overline{a - 2i} \cdot \overline{(-1 + 3i)\bar{b}} \right|$.

4. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, welches von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.