Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik I für Studierende der Informatik und der Ingenieurwissenschaften

im Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 9

Alle vier Aussagen sind mit den Folgen verbunden. Während der Ferien können Sie sich schöne Beispiele und Bilder von Fraktalen anschauen. Die Fibonacci-Folge ist

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Man bekommt das nächste Glied, indem man die letzten zwei zusammenzählt. Sie können sich vergewissern, dass für deren Glieder gilt:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - (-\alpha)^{-n}).$$

Dabei ist $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ genau der goldene Schnitt.

Das gesamte Team der Mathe 1 wünscht Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik I für Info. und Ing.“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Mittwoch, der 8. Januar 2020, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite **Ihre Namen** und **Ihre Gruppe** und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz für $n \to \infty$:

(a) $a_n = 3n^2$,

(b) $a_n = \frac{(-2)^n}{n^2}$,

(c) $a_n = \frac{4n^2+3n+2}{2n+4}$,

(d) $a_n = \frac{3n^2}{4n^3-12}$,

(e) $a_n = \begin{cases} 2n+4, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{4n}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

2. Zeigen Sie die nachstehenden Behauptungen für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) Aus $a_n \to +\infty$ (bzw. $a_n \to -\infty$) folgt $\frac{1}{a_n} \to 0$.

(b) Aus $a_n \to 0$ und $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ (bzw. $\frac{1}{a_n} \to -\infty$).

3. Bestimmen Sie für beliebiges $k \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$a_n = k^n \exp(-n).$$

4. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1).$$

Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, falls

(a) $a_1 = 0$ oder

(b) $a_1 = 2$.