

M A T H E M A T I K I  
FÜR INFORMATIKER UND INGENIEURE

2019/2020

**Patrick Dondl**

Original von Ernst Kuwert

Abteilung für Angewandte Mathematik  
Universität Freiburg



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlegende Strukturen</b>	<b>1</b>
1.1	Aussagen . . . . .	1
1.2	Mengen und Aussageformen . . . . .	2
1.3	Aussagen in der Mathematik . . . . .	3
1.4	Abbildungen . . . . .	3
1.5	Zahlen . . . . .	5
1.6	Vollständige Induktion . . . . .	8
1.7	Geometrie im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	13
1.8	Die komplexen Zahlen . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit</b>	<b>21</b>
2.1	Reelle Funktionen . . . . .	21
2.2	Polynome und rationale Funktionen . . . . .	22
2.3	Kreisfunktionen . . . . .	26
2.4	Zahlenfolgen und Grenzwerte . . . . .	30
2.5	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen</b>	<b>42</b>
3.1	Die Ableitung: Definition und Regeln . . . . .	42
3.2	Mittelwertsatz und Anwendungen . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>51</b>
4.1	Das Riemannsches Integral . . . . .	51



# Kapitel 1

## Grundlegende Strukturen

### 1.1 Aussagen

Als Aussage im Mathematischen Sinne bezeichnen wir ein sprachliches Gebilde, dem entweder der Wahrheitswert wahr ( $w$ ) oder falsch ( $f$ ) zugeordnet werden kann.

Mittels einer Wahrheitstabelle lassen sich einfache Zusammenhänge zwischen Aussagen Aussagen gut darstellen.

	Aussage	wahr/falsch
$A$	„Es sind mehr als 10 Personen im Rundbau“	$w$
$B$	„Es sind weniger als 20 Personen im Rundbau“	$f$

Aus gegebenen Aussagen lassen sich neue Aussagen generieren.  $A, B$  seien Aussagen.

1. Nicht  $A$ , („ $\neg A$ “) ist die Negation von  $A$ .

$A$	$\neg A$
$w$	$f$
$f$	$w$

2.  $A$  oder  $B$  („ $A \vee B$ “) ist wahr genau dann wenn mindestens eine der Aussagen  $A, B$  wahr ist.  $A$  und  $B$  („ $A \wedge B$ “) ist wahr genau dann, wenn beide Aussagen  $A, B$  wahr sind.

$A$	$B$	$A \vee B$	$A \wedge B$
$w$	$w$	$w$	$w$
$f$	$w$	$w$	$f$
$w$	$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$	$f$

3. Aus  $A$  folgt  $B$  („ $A \Rightarrow B$ “) ist wahr, genau dann wenn die Aussage  $A$  die Aussage  $B$  impliziert.  $A$  ist äquivalent zu  $B$  („ $A \Leftrightarrow B$ “) ist wahr, genau dann wenn die Aussage  $A$  die Aussage  $B$  impliziert und die Aussage  $B$  die Aussage  $A$  impliziert.

*Bemerkung.* Um  $A \Rightarrow B$  zu zeigen, kann man annehmen, dass  $A$  wahr ist und muss dann  $B$  folgern.

## 1.2 Mengen und Aussageformen

**Mengen:** Die Frage, was eigentlich genau eine Menge ist, ist schwer zu beantworten. Wir begnügen uns damit, die Existenz einiger bestimmter Mengen anzunehmen und daraus neue Mengen zu generieren.

Die Objekte nennen wir *Elemente der Menge*. Die Notation  $a \in M$  bedeutet, dass  $a$  ein Element der Menge  $M$  ist; andernfalls schreiben wir  $a \notin M$ . Die Entscheidung, ob irgendein Objekt  $a$  Element von  $M$  ist oder nicht, muss mithilfe der Beschreibung von  $M$  immer möglich sein.

Endliche Mengen lassen sich durch Aufzählung ihrer Elemente beschreiben, wir schreiben  $A = \{1, 3, 15, 32\}$ , als die Menge, welche die Zahlen 1, 3, 15 und 32 als Elemente enthält. Wir schreiben  $1 \in A$  für „Die Menge  $A$  enthält das Element 1“.

*Beispiel.* Das griechische Alphabet ist die Menge

$$M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \psi, \chi, \psi, \omega\}$$

Die Elemente sind die einzelnen Buchstaben, und wir haben  $M$  durch *Aufzählen aller Elemente* angegeben. Die Menge  $M$  bleibt gleich, wenn wir die Reihenfolge in der Aufzählung ändern. Oft werden die Elemente nur unvollständig aufgezählt in der Erwartung, dass man sich den Rest denken kann:  $M = \{\alpha, \dots, \omega\}$ .

*Beispiel.* Eine (erstaunlich) wichtige Menge ist die leere Menge  $\emptyset$ , welche keine Elemente enthält.

Eine Menge  $M$  heißt Teilmenge der Menge  $N$ , wenn jedes Element von  $M$  auch Element von  $N$  ist (Notation:  $M \subset N$ ). Gibt es außerdem mindestens ein Element von  $N$ , das nicht zu  $M$  gehört, so ist  $M$  eine echte Teilmenge von  $N$ .

*Beispiel.* Beispiel: unter den Studierenden der Mikrosystemtechnik bilden die männlichen eine echte Teilmenge, das heißt es gibt mindestens eine Studentin.

Statt  $M \subset N$  schreiben wir manchmal auch  $N \supset M$ , also  $N$  ist Obermenge von  $M$ . Es gilt  $A = B$ , falls  $A \subset B$  und  $B \subset A$ .

**Aussageformen:** Es sei nun  $M$  eine Menge, und  $E$  eine Eigenschaft, von der für jedes Element in  $M$  überprüft werden kann, ob die Eigenschaft für dieses Element zutrifft. Wir nennen dann  $E$  eine „Aussageform“ und schreiben auch  $E(x)$  um die Abhängigkeit von  $x$  in  $M$  zu unterstreichen.  $E(x)$  ist dann eine Aussage.

Man kann nun aus  $M$  eine Teilmenge mit den Elementen erzeugen, welche die Eigenschaft  $E$  besitzen. Wir schreiben

$$X = \{x \in M : E(x)\}$$

Aus gegebenen Mengen lassen sich auch auf andere Art neue Mengen erzeugen.  $X$  und  $Y$  seien Mengen. Die Vereinigung  $X \cup Y$  ist die Menge der Elemente, welche in  $X$  oder in  $Y$  (oder in beiden) sind. Der Schnitt  $X \cap Y$  ist die Menge der Elemente, welche sowohl in  $X$  als auch in  $Y$  sind. Falls  $X \subset Y$ , so ist die Differenzmenge  $Y \setminus X$  die Menge der Elemente, welche in  $Y$  aber nicht in  $X$  enthalten sind. Ist  $A$  eine gegebene Grundmenge und  $X \subset A$ , so nennen wir  $X^C = A \setminus X$  das Komplement von  $X$ . Das Komplement hängt von der Grundmenge  $X$  ab: die Aussage *ich trinke alles außer Ganter* hat verschiedene Bedeutung, je nachdem ob sie sich auf die alle badischen Biere bezieht oder auf alle alkoholischen Getränke.

*Bemerkung.* Außer der Vereinigungsmenge lassen sich die oben eingeführten abgeleiteten Mengen auch mithilfe von Aussageformen darstellen, so ist beispielsweise

$$X \cap Y = \{x \in X : x \in Y\} = \{x \in Y : x \in X\}.$$

Wir benütigen weiters die sogenannten Quantoren

$$\begin{aligned} \forall a \in A : E(a) & \text{ für alle } a \in A \text{ gilt Eigenschaft } E(a) \\ \exists a \in A : E(a) & \text{ es gibt ein } a \in A \text{ mit Eigenschaft } E(a). \end{aligned}$$

Aus Gründen der Lesbarkeit werden wir  $\wedge, \vee, \neg$  nicht verwenden, und  $\forall, \exists$  sowie  $\Leftrightarrow$  eher sparsam.

### 1.3 Aussagen in der Mathematik

Im Grunde besteht die Arbeit eines Mathematikers darin, aus einigen fundamentalen Aussagen, welche als wahr angenommen werden (sogenannten Axiomen), möglichst viele weitere, nützliche und wahre Aussagen abzuleiten (und deren Wahrheit durch Aneinanderreihung elementar nachvollziehbarer Schritte zu beweisen). Eine solche bewiesene wahre Aussage bezeichnet man als Satz. Als Lemma oder Proposition bezeichnet man kleinere Sätze, welche zum Beweis eines wichtigen Satzes benütigt werden (im Wesentlichen dient dies nur zur Strukturierung eines Beweises im Sinne eines leichteren Verständnisses).

Eine noch nicht bewiesene Aussage in der Mathematik, von deren Wahrheit aber viele Mathematiker überzeugt sind, nennt man Vermutung. Ein Beispiel dazu ist die sogenannte Collatz-Vermutung.

### 1.4 Abbildungen

Seien  $X, Y$  Mengen. Eine Abbildung von  $X$  nach  $Y$  (gleichbedeutend: eine Funktion auf  $X$  mit Werten in  $Y$ ) schreiben wir in der Form

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

Jedem  $x \in X$  wird genau ein Bildpunkt (Funktionswert)  $f(x) \in Y$  zugeordnet. Die Menge  $X$  heißt Definitionsbereich von  $f$ . Mit dem Bild von  $f$  meinen wir die Menge der Bildpunkte (Menge der Funktionswerte)

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset Y.$$

Das Urbild einer Menge  $B \subset Y$  unter  $f$  ist die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Verkleinern des Definitionsbereichs ergibt eine Einschränkung von  $f$ . Für  $A \subset X$  ist

$$f|_A : A \rightarrow Y, (f|_A)(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in A.$$

*Beispiel.* Sei  $X$  die Menge aller Waren in einem Supermarkt und  $Y$  die Menge aller möglichen Preise in Euro. Ordnen wir jeder Ware  $x \in X$  einen Preis  $f(x) \in Y$  zu, so haben wir eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$ . Das Urbild der Menge  $\{0,99\}$  ist die Menge der Waren, die 0,99 kosten. Betrachten wir statt aller Waren nur die Menge  $W$  der Wurstwaren, so ergibt sich die Einschränkung  $f|_W$ .

Eine naheliegende Abbildung ist  $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ,  $\text{id}_X(x) = x$ , die Identität oder identische Abbildung auf  $X$ . Die Verkettung (oder Hintereinanderschaltung) von Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  ist

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Eine aus der Schule bekannte Möglichkeit, sich Funktionen bzw. Abbildungen vorzustellen, bietet der Graph. Dazu bilden wir das kartesische Produkt

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Es gilt  $(x, y) = (x', y')$  genau wenn  $x = x'$  und  $y = y'$ . Der Graph von  $f$  ist die Teilmenge

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Als nächstes drei Begriffe zum Abbildungsverhalten:  $f : X \rightarrow Y$  heißt

*injektiv* wenn gilt: aus  $f(x) = f(x')$  folgt  $x = x'$ ;

*surjektiv* wenn gilt: zu jedem  $y \in Y$  gibt es ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  (also  $Y = f(X)$ );

*bijektiv* wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

Ordnen wir jedem Kind seine Mutter zu, so erhalten wir eine Abbildung von der Menge  $K$  aller Kinder in die Menge  $F$  aller Frauen. Diese Abbildung ist nicht surjektiv, denn nicht jede Frau ist Mutter. Sie ist auch nicht injektiv, denn es gibt Mütter mit mehr als einem Kind.

Für die Gleichung  $f(x) = y$ , mit  $y \in Y$  gegeben, bedeuten die Begriffe Folgendes:  $f$  injektiv heißt, die Gleichung hat höchstens eine Lösung.  $f$  surjektiv heißt, es gibt mindestens eine Lösung. Ist  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv, so hat die Gleichung genau eine Lösung. Indem wir jedem  $y \in Y$  die jeweilige Lösung zuordnen, erhalten wir eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$ ,  $y \mapsto g(y)$ , mit

$$f(g(y)) = y \text{ für alle } y \in Y, \text{ also } f \circ g = \text{id}_Y.$$

Wählen wir in der Gleichung als rechte Seite  $y := f(x)$ , so ist  $x$  die Lösung, das heißt

$$g(f(x)) = x, \text{ und damit } g \circ f = \text{id}_X.$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $g : Y \rightarrow X$  ebenfalls bijektiv ist (Übungsaufgabe). Wir nennen  $g = f^{-1}$  die zu  $f$  inverse Abbildung oder Umkehrfunktion. Für den Graphen der Umkehrfunktion sehen wir, indem wir  $y = f(x)$  substituieren,

$$G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in Y\} = \{(f(x), x) : x \in X\} \subset Y \times X.$$

Der Graph ergibt sich also durch "Spiegelung an der Winkelhalbierenden".

*Beispiel.* Bezeichne mit  $p_1, p_2$  die Projektionen von  $X \times Y$  auf die Faktoren, gewissermaßen die Koordinaten. Also

$$p_1 : X \times Y \rightarrow X, p_1((x, y)) = x, \quad p_2 : X \times Y \rightarrow Y, p_2((x, y)) = y.$$

Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion, so ist die Abbildung

$$F : X \rightarrow G_f, F(x) = (x, f(x)),$$

bijektiv, die Umkehrabbildung ist  $p_1|_{G_f} : G_f \rightarrow X$ . Es folgt für  $f$  die Darstellung

$$f = p_2 \circ (p_1|_{G_f})^{-1}.$$

Die Funktion  $f$  ist also durch ihren Graph  $G_f$  bestimmt.

## 1.5 Zahlen

Aus der Schule kennen wir die Zahlen  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} & \text{natürliche Zahlen} \\ \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} & \text{ganze Zahlen} \\ \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\} & \text{rationale Zahlen} \end{array}$$

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  fassen wir als Punkte auf der Zahlengeraden auf. Anstatt eine abstrakte Konstruktion von  $\mathbb{R}$  durchzuführen, stellen wir im Folgenden die Regeln (Axiome) in  $\mathbb{R}$  zusammen. Die Gesetze der Addition und Multiplikation lauten wie folgt:

$$\begin{array}{ll} + & \bullet \\ \text{Assoziativgesetz:} & (a + b) + c = a + (b + c) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \text{Kommutativgesetz:} & a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a \\ \text{Neutrales Element:} & a + 0 = a \quad a \cdot 1 = a \\ \text{Inverses Element:} & a + (-a) = 0 \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1 \quad \text{falls } a \neq 0 \\ \text{Distributivgesetz:} & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \end{array}$$

Alle bekannten Rechenregeln wie zum Beispiel  $(-a)(-b) = ab$  können daraus hergeleitet werden. Wir erwähnen die *Nullteilerfreiheit*:

$$\text{Aus } a \cdot b = 0 \text{ folgt } a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Denn ist  $a \neq 0$ , so folgt

$$b = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

Wir haben oben noch verwendet, dass gilt  $x \cdot 0 = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Dies zu zeigen ist eine Übungsaufgabe.

*Bemerkung.* Mengen mit zwei Verknüpfungen (Addition und Multiplikation), welche den obigen Rechenregeln folgen, nennt man Zahlkörper. Dazu gehört auch die Menge der komplexen Zahlen, die wir später kennen lernen werden.

Den Punkt bei der Multiplikation lassen wir meistens weg. Auch die Regeln der Bruchrechnung lassen sich aus den Körperaxiomen herleiten, wir listen sie hier auf:

**Satz 1.5.1** (Bruchrechnung). Für  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $c, d \neq 0$  gilt:

- (1)  $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$  (Gleichnamig machen von Brüchen),
- (2)  $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$  (Multiplikation von Brüchen),
- (3)  $\frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}$ , falls zusätzlich  $b \neq 0$  (Division von Brüchen).

Als nächstes erklären wir die Anordnung von  $\mathbb{R}$ . Die Ungleichung  $a < b$  bedeutet auf der Zahlengeraden, dass  $a$  links von  $b$  liegt bzw.  $a - b$  links von Null. Offenbar gilt genau eine der Relationen  $a < b$ ,  $a > b$  oder  $a = b$ . Hier einige Regeln:

- Aus  $a, b > 0$  folgt  $a + b > 0$  und  $a \cdot b > 0$ .
- Aus  $a > b$ ,  $b > c$  folgt  $a > c$  (Transitivität).
- Aus  $a > b$  und  $c > d$  folgt  $a + c > b + d$  (Addition von Ungleichungen)
- Aus  $a > b$  folgt  $\begin{cases} ac > bc & \text{falls } c > 0 \\ ac < bc & \text{falls } c < 0 \end{cases}$  (Multiplikation mit einer Zahl).

Wir wollen diese und weitere Regeln nicht herleiten. Eine wichtige Konsequenz ist: *Quadrate in  $\mathbb{R}$  sind nichtnegativ*, denn

$$a^2 = \begin{cases} a \cdot a > 0 & \text{im Fall } a > 0, \\ (-a) \cdot (-a) > 0 & \text{im Fall } -a > 0. \end{cases}$$

**Definition 1.5.2.** Der Betrag einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  ist

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Auf der Zahlengeraden ist  $|a|$  der Abstand zum Nullpunkt. Die Definition des Betrags hat folgende Konsequenz: Wenn Sie ein Betragszeichen beseitigen möchten, müssen Sie eine Fallunterscheidung machen.

**Satz 1.5.3** (Rechnen mit Beträgen). Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gelten folgende Aussagen:

- (1)  $|-a| = |a|$  und  $a \leq |a|$ .
- (2)  $|a| \geq 0$ ; aus Gleichheit folgt  $a = 0$ .
- (3)  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .
- (4)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .
- (5)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$ .

*Beweis.* Aus Definition 1.5.2 folgt

$$|-a| = \begin{cases} -a & \text{falls } -a \geq 0 \\ -(-a) & \text{falls } -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a & \text{falls } a \leq 0 \\ a & \text{falls } a \geq 0 \end{cases} = |a|.$$

Weiter folgt (2) aus

$$|a| - a = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \geq 0, \\ -a - a \geq 0 & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$$

In (3) bleiben die linke und rechte Seite gleich, wenn wir  $a$  durch  $-a$  ersetzen, dasselbe gilt bezüglich  $b$ . Also können wir  $a, b \geq 0$  annehmen, und erhalten  $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$  wie verlangt. Für (4) schätzen wir mit (1) wie folgt ab:

$$|a + b| = \pm(a + b) = \pm a + (\pm b) \leq |a| + |b|.$$

Schließlich gilt  $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$  nach (4), also  $|a - b| \geq |a| - |b|$ . Durch Vertauschen von  $a$  und  $b$  folgt (5).  $\square$

Alle bis jetzt zusammengestellten Regeln gelten auch für die rationalen Zahlen. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass wir mit den rationalen Zahlen nicht auskommen werden. Wir sehen hier ein typisches Beispiel für einen indirekten Beweis.

*Beispiel.* Es gibt kein  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x^2 = 2$ . Angenommen doch: dann können wir  $x > 0$  annehmen (ersetze  $x$  durch  $-x$ ), und weiter nach Kürzen  $x = p/q$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$  nicht beide gerade. Aber dann folgt

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2p' \Rightarrow 4(p')^2 = 2q^2 \Rightarrow q = 2q'.$$

Also sind  $p, q$  doch beide gerade, ein Widerspruch. Wir haben benutzt, dass für  $p$  ungerade auch  $p^2$  ungerade ist. Die Quadrate von ungeraden Zahlen haben nur die Endziffern 1, 9, 5.

Der Unterschied zwischen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  ist die Vollständigkeit, das heißt in  $\mathbb{R}$  können wir beliebige Grenzprozesse durchführen. Zum Beispiel können wir Schritt für Schritt die Ziffern der Dezimalentwicklung von  $\sqrt{2} = 1,4142\dots$  bestimmen. Im ersten Schritt ist  $1^2 < 2$  und  $2^2 > 2$ , also nehmen wir die 1. Im zweiten Schritt ist  $1,4^2 = 1,96$  zu klein,  $1,5^2 = 2,25$  zu groß, also kommt die 4. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge, die die irrationale Zahl  $\sqrt{2}$  approximiert (in welchem Sinne das genau zu verstehen ist, sehen wir in Abschnitt 2.4). Wir wollen nun eine Version der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  genauer formulieren, und führen gleichzeitig einige Begriffe ein.

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  definieren wir die Intervalle

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{rechtsseitig offen, linksseitig abgeschlossen} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{linksseitig offen, rechtsseitig abgeschlossen} \\ |I| &= b - a \text{ für ein Intervall } I && \text{Intervalllänge} \end{aligned}$$

Es ist praktisch,  $+\infty$  und  $-\infty$  als *offene* Intervallgrenzen zugelassen, zum Beispiel ist  $(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq 1\}$ . Beachten Sie:  $\pm\infty$  sind keine reellen Zahlen.

**Definition 1.5.4.** Die Menge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt

$$\begin{aligned} \text{nach oben beschränkt} &\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} \text{ mit } x \leq b \text{ für alle } x \in M, \\ \text{nach unten beschränkt} &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq a \text{ für alle } x \in M. \end{aligned}$$

Die Zahl  $b$  heißt dann obere Schranke ( $a$  untere Schranke). Weiter heißt  $M$  beschränkt, wenn  $M$  nach oben und unten beschränkt ist.

*Beispiel.* Die Menge  $[0, 1)$  ist nach oben beschränkt, eine obere Schranke ist zum Beispiel  $b = 2012$ . Es gibt in  $[0, 1)$  aber kein größtes Element, denn es gilt

$$x \in [0, 1) \Rightarrow \frac{x+1}{2} \in [0, 1), \text{ und } \frac{x+1}{2} > x.$$

Unter den oberen Schranken von  $[0, 1)$  gibt es aber eine kleinste, nämlich die Zahl 1.

Die folgende Eigenschaft ist nun für die reellen Zahlen charakteristisch.

**Vollständigkeitsaxiom** *Jede nach oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  hat eine kleinste obere Schranke.*

Die Aussage, dass  $S \in \mathbb{R}$  kleinste obere Schranke von  $M$  ist, bedeutet zwei Dinge:

- (1)  $S$  ist eine obere Schranke von  $M$ , das heißt  $x \leq S$  für alle  $x \in M$ .
- (2)  $S$  ist kleinstmöglich, das heißt für alle  $S' < S$  gibt es ein  $x \in M$  mit  $x > S'$ .

Wir bezeichnen die kleinste obere Schranke mit  $S = \sup M$  (*Supremum von  $M$* ). Ist  $M$  nicht nach oben beschränkt, so definieren wir  $\sup M = +\infty$ . Analog ist das *Infimum*  $\inf M$ , die größte untere Schranke, definiert.

Wie liegen nun die rationalen Zahlen in  $\mathbb{R}$  drin? Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  sind nicht nach oben beschränkt, denn andernfalls haben diese ein Supremum  $S \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $S - 1$  keine obere Schranke, das heißt es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > S - 1$ , oder  $n + 1 > S$ . Damit ist  $S$  keine obere Schranke, Widerspruch. Es folgt weiter

$$\text{Zu jedem } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0 \text{ gibt es ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \frac{1}{n} < x.$$

Denn sonst wäre  $\mathbb{N}$  durch  $\frac{1}{x}$  nach oben beschränkt. Dies bedeutet weiter, dass in jedem nichtleeren Intervall  $(a, b)$  rationale Zahlen liegen. Dazu wählen wir  $n \in \mathbb{N}$  mit  $1/n < b - a$ . Ein ganzzahliges Vielfaches von  $1/n$  muss dann im Intervall  $(a, b)$  liegen.

## 1.6 Vollständige Induktion

Es sei  $E(n)$  eine Aussageform, die durch einsetzen einer beliebigen natürlichen Zahl  $n$  zu einer Aussage wird. Wir möchten nun Aussagen der Form

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } E(n).$$

beweisen.

*Beispiel.* Wir definieren

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1).$$

Alternativ können wir auch eine Rekursionsformel schreiben

$$\begin{aligned} s_1 &= 4, \\ s_n &= s_{n-1} + (2n + 1). \end{aligned}$$

Es ergibt sich damit

$$\begin{aligned} s_1 &= 4, \\ s_2 &= 9, \\ s_3 &= 16, \\ s_4 &= 25, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Das legt die Vermutung nahe, dass es sich bei den Zahlen  $s_n$  für jedes  $n$  um eine Quadratzahl handelt. In der Tat gilt der folgende

**Satz 1.6.1.** *Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt*

$$s_n = (n + 1)^2.$$

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion beruht auf folgendem Prinzip:

*Sei  $E(n)$  eine Folge von Aussagen für  $n \in \mathbb{N}$ . Es gelte:*

- (1)  $E(1)$  ist wahr.
- (2)  $E(n)$  ist wahr  $\Rightarrow E(n + 1)$  ist wahr.

*Dann sind alle Aussagen  $E(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  wahr.*

Ein Induktionsbeweis funktioniert immer in zwei Schritten: Erst wird die Aussage  $E(n)$  für den Fall  $n = 1$  verifiziert (Induktionsanfang). Im zweiten Schritt wird *vorausgesetzt*, dass  $E(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  richtig ist (Induktionsannahme), und daraus  $E(n + 1)$  gefolgert (Induktionsschluss, d.h. Beweis der Induktionsbehauptung).

Kommen wir zurück zum Beispiel. Der angegebene Satz lässt sich damit wie folgt beweisen.

*Beweis von Satz 1.6.1.* Induktionsanfang: Für  $n = 1$  gilt  $s_1 = 4 = 2^2 = (1 + 1)^2$ . Die Aussage ist also für  $n = 1$  offensichtlich korrekt.

Induktionsschritt: Nun gelte die Aussage für  $n \in \mathbb{N}$ , also sei  $s_n = (n + 1)^2$ . Wir müssen folgern, dass dann auch gilt  $s_{n+1} = (n + 1 + 1)^2$ . Das kann man nachrechnen.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + (2(n + 1) + 1) \quad (\text{nach der Rekursionsformel oben}) \\ &= (n + 1)^2 + (2(n + 1) + 1) \quad (\text{dank Induktionsvoraussetzung}) \\ &= (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 \\ &= ((n + 1) + 1)^2 \\ &= (n + 1 + 1)^2, \end{aligned}$$

womit die Induktionsbehauptung gezeigt ist. Damit ist der Satz nach dem Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen.  $\square$

Statt bei  $n = 1$  kann die Induktion auch bei  $n_0 \in \mathbb{N}$  starten, die Aussage gilt dann für  $n \geq n_0$ . Damit zeigen wir folgende nützliche Ungleichung.

**Satz 1.6.2** (Bernoullische Ungleichung). Für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq -1$ , und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n = 0$  gilt nach Definition  $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$ . Wegen  $1+x \geq 0$  folgt weiter

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \\ &\geq (1+x) \cdot (1+nx) \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

$\square$

Viele weitere Aussagen lassen sich durch vollständige Induktion beweisen.

**Satz 1.6.3** (Geometrische Summe). Sei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$1+x+\dots+x^n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

*Beweis.* Wir zeigen das wieder durch vollständige Induktion, wobei wir bei  $n = 0$  beginnen:

$$\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}.$$

Jetzt gelte die Formel für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} \stackrel{E(n)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x},$$

womit die Behauptung gezeigt ist.  $\square$

Wir wollen als nächstes die Elemente gewisser Mengen zählen. Als erstes zeigen wir, dass man beim Verteilen von 4 Briefen auf 3 Briefkästen in mindestens einen Briefkasten mehr als einen Brief stecken muss.

**Satz 1.6.4** (Schubfachprinzip). Ist  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  injektiv mit  $m, n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $m \leq n$ .

*Beweis.* Wir führen Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n = 1$  haben wir  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1\}$  injektiv, das geht nur für  $m = 1$ . Sei nun eine injektive Abbildung  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$  gegeben; wir müssen zeigen dass  $m \leq n+1$  ist. Hat die Zahl  $n+1$  kein Urbild, so ist tatsächlich  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  und nach Induktion gilt sogar  $m \leq n$ . Andernfalls hat  $n+1$  genau ein Urbild. Wenn wir dieses rausschmeißen und neu nummerieren, erhalten wir eine Abbildung

$$\tilde{f} : \{1, \dots, m-1\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad \text{injektiv.}$$

Nach Induktion folgt  $m-1 \leq n$  bzw.  $m \leq n+1$  wie gewünscht.  $\square$

**Definition 1.6.5** (Mächtigkeit von Mengen). 1. Zwei Mengen  $M$  und  $N$  heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung zwischen  $M$  und  $N$  existiert.

2. Falls eine Menge  $M$  und die Menge  $\{1, \dots, n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gleichmächtig sind, so heißt  $M$  endlich und  $n = \#M$  ist die Anzahl ihrer Elemente. Die leere Menge ist ebenfalls endlich mit  $\#\emptyset = 0$ .

Dass die Zahl der Elemente eindeutig definiert ist, folgt aus dem Schubfachprinzip. Wir setzen

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (n\text{-Fakultät}).$$

Per Dekret ist  $0! = 1$  (vgl. Vereinbarung zum leeren Produkt). Der folgende Satz beantwortet die Frage nach der Anzahl der möglichen Anordnungen (oder Umordnungen oder Permutationen) von  $n$  Dingen.

**Satz 1.6.6** (Zahl der Permutationen). Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $S_n$  die Menge der bijektiven Abbildungen  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt  $\#S_n = n!$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung durch Induktion, wobei der Induktionsanfang  $n = 1$  offensichtlich ist. Sei  $S_{n+1,k}$  die Menge der Permutationen von  $\{1, \dots, n+1\}$ , die die Nummer  $k$  auf  $n+1$  abbilden. Da die restlichen  $n$  Nummern beliebig bijektiv auf  $\{1, \dots, n\}$  abgebildet werden, hat  $S_{n+1,k}$  genau  $n!$  Elemente nach Induktion. Es folgt durch Summation

$$\#S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \#S_{n+1,k} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

□

**Definition 1.6.7** (Binomialkoeffizienten). Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad \text{sowie} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

**Lemma 1.6.8** (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten). Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  erfüllen die Binomialkoeffizienten die Formel

$$\binom{\alpha + 1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1}.$$

*Beweis.* Für  $k = 1$  ist leicht zu sehen, dass die Formel richtig ist. Für  $k \geq 2$  berechnen wir

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} &= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} \\ &= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 2) \cdot (\alpha - k + 1 + k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \frac{(\alpha + 1) \cdot \alpha \cdot \dots \cdot ((\alpha + 1) - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \binom{\alpha + 1}{k}. \end{aligned}$$

□

Im Fall  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  erlaubt Lemma 1.6.8 die rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  nach dem Dreiecksschema von Blaise Pascal (1623-1662).

n=0				1											
n=1			1		1										
n=2			1		2		1								
n=3			1		3		3		1						
n=4			1		4		6		4		1				
n=5			1		5		10		10		5		1		
n=6			1		6		15		20		15		6		1

Ebenfalls für  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  folgt durch Erweitern der Binomialkoeffizienten mit  $(n - k)!$  die alternative Darstellung

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (1.2)$$

und daraus weiter die am Diagramm ersichtliche Symmetrieeigenschaft

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (1.3)$$

**Satz 1.6.9** (Zahl der Kombinationen). *Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Dann ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  gleich  $\binom{n}{k}$ .*

*Beweis.* Es gilt  $\binom{n}{0} = 1$  nach Definition, und die einzige null-elementige Teilmenge von  $\{0, 1, \dots, n\}$  ist die leere Menge. Also stimmt die Aussage für alle  $n = 0, 1, \dots$  und  $k = 0$ . Die  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n + 1\}$  mit  $k \geq 1$  zerfallen in zwei Klassen:

**Klasse 1:** Die Menge enthält die Nummer  $n + 1$  nicht.

**Klasse 2:** Die Menge enthält die Nummer  $n + 1$ .

Klasse 1 besteht genau aus den  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ , Klasse 2 ergibt sich durch Hinzufügen der Nummer  $n + 1$  zu jeder der  $(k - 1)$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ . Nach Induktion folgt für die Gesamtzahl der Elemente mit Lemma 1.6.8

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k - 1} = \binom{n + 1}{k},$$

womit der Satz bewiesen ist. □

**Satz 1.6.10** (Binomische Formel). *Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (1.4)$$

*Beweis.* Ausmultiplizieren des  $n$ -fachen Produkts  $(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b) \cdot \dots \cdot (a + b)$  mit dem Distributivgesetz und Ordnen nach dem Kommutativgesetz liefert Terme der Form  $a^k b^{n-k}$  für  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Die Häufigkeit eines solchen Terms ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus den  $n$  Klammern  $k$  Klammern auszusuchen, in denen  $a$  als Faktor genommen wird; in den restlichen Klammern muss dann der Faktor  $b$  gewählt werden. Nach Satz 1.6.9 kommt  $a^k b^{n-k}$  also genau  $\binom{n}{k}$  mal vor. □

## 1.7 Geometrie im $\mathbb{R}^n$

Im folgenden sei  $n \in \mathbb{N}$ , zum Beispiel  $n = 2$  oder  $n = 3$ . Wir bezeichnen mit  $\mathbb{R}^n$  das  $n$ -fache kartesische Produkt  $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ , also die Menge aller  $n$ -Tupel

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir nennen die Elemente von  $\mathbb{R}^n$  auch *Vektoren*. Zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sind genau dann gleich, wenn  $x_i = y_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , wenn also alle *Koordinaten* gleich sind. Wir können Vektoren addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren (zum Beispiel strecken):

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

In diesem Zusammenhang nennt man die Zahl  $\lambda$  auch einen Skalar, und spricht von Skalarmultiplikation. Die Standard-Einheitsvektoren sind

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Mit ihnen ergibt sich für jeden Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Die Vektoraddition und Skalarmultiplikation erfüllen folgende Regeln, die alle direkt aus den Definitionen folgen:

- (1)  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- (2)  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$  für alle  $\vec{x}$ , mit  $\vec{0} = (0, \dots, 0)$  (Nullvektor)
- (3) Es gilt  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
- (4)  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- (5)  $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
- (6)  $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$
- (7)  $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
- (8)  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ .

Im drei-dimensionalen Raum kann jede Gerade mit  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ , jede Ebene mit  $\mathbb{R}^2$  und der Raum selbst mit  $\mathbb{R}^3$  identifiziert werden, indem ein kartesisches Koordinatensystem gewählt wird. Wir wollen das erklären, indem wir den Begriff des Euklidischen Raums aus der Anschauung verwenden, das heißt der Euklidische Abstand zwischen zwei Punkten sei anschaulich gegeben. Ebenso setzen wir den Begriff der Orthogonalität für sich schneidende Geraden anschaulich voraus.

Auf einer Geraden  $g$  wählen wir einen Punkt  $O$ , den Ursprung (*origin*). Dann besteht  $g \setminus \{O\}$  aus zwei Halbgeraden. Wir erhalten eine Koordinate  $x$  auf  $g$ , indem wir auf einer der Halbgeraden für  $x$  den Abstand zu  $O$  wählen, auf der anderen Halbgeraden den negativen Abstand zu  $O$ . Die Koordinate  $x$  ist eindeutig bestimmt durch die Wahl des Ursprungs  $O$  und die Entscheidung, welche Halbgerade die positive ist.

In einer Ebene  $E$  wählen wir wieder einen Ursprung  $O$ , und weiter zwei zueinander orthogonale Geraden  $g, h$  durch  $O$ . Auf  $g, h$  bestimmen wir jeweils Koordinaten  $x, y$  wie oben beschrieben. Jeder Punkt  $p \in E$  kann jetzt auf  $g$  und  $h$  orthogonal projiziert werden, dies liefert für  $p$  die beiden Koordinaten  $(x, y)$ . Die Frage nach der Eindeutigkeit ist nun schon schwieriger. Wir nehmen an, dass der Ursprung fest ist und betrachten ein zweites Paar  $g', h'$  zueinander senkrechter Geraden, genauer soll  $g', h'$  aus  $g, h$  durch Drehung um einen Winkel  $\alpha$  hervorgehen. Dann sieht man (Bild)

$$\begin{aligned} x &= (\cos \alpha) x' - (\sin \alpha) y' & x' &= (\cos \alpha) x + (\sin \alpha) y \\ y &= (\sin \alpha) x' + (\cos \alpha) y' & y' &= -(\sin \alpha) x + (\cos \alpha) y \end{aligned}$$

Wir kommen schließlich zur Wahl kartesischer Koordinaten im drei-dimensionalen Raum. Wieder wählen wir einen Ursprung  $O$  und nun drei zueinander senkrechte Geraden  $g, h, \ell$ . Seien  $x, y, z$  die Koordinaten auf den drei einzelnen Geraden wie oben erklärt. Jeder Punkt  $p$  im Raum wird auf die drei Geraden orthogonal projiziert und liefert so die Koordinaten  $(x, y, z)$ . Die Frage nach der Eindeutigkeit bzw. der Umrechnung in ein anderes Koordinatensystem ist etwas schwieriger, wir kommen später in der Vorlesung darauf zurück.

Indem wir  $\mathbb{R}^2$  mit einer Ebene bzw.  $\mathbb{R}^3$  mit dem Euklidischen Raum identifizieren (wie oben beschrieben), erhalten wir eine anschauliche Darstellung der Vektoraddition, Vektorsubtraktion und Skalarmultiplikation.

Die oben benutzten Begriffe Länge und Winkel wollen wir noch genauer erklären. Die Euklidische Länge (oder der Betrag) eines Vektors ist definiert durch

$$|\vec{x}| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Für  $n = 2$  ist  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , dies entspricht also dem Satz von Pythagoras (Bild). Für  $n = 3$  haben wir  $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Dies lässt sich ebenfalls mit Pythagoras begründen, indem der Punkt  $(x_1, x_2, 0)$  betrachtet wird (Bild). Offenbar gilt für  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |\vec{x}| &\geq 0 \quad (\text{Gleichheit nur für } \vec{x} = \vec{0}) \\ |\lambda \vec{x}| &= |\lambda| |\vec{x}|. \end{aligned}$$

Der Euklidische Abstand ist

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| \quad \text{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere ist der Betrag gleich dem Abstand zum Nullpunkt, i.e.  $|\vec{x}| = \text{dist}(\vec{x}, \vec{0})$ . Eine weitere nützliche Größe ist das Skalarprodukt zwischen Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{für } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

Statt mit Klammern wird das Skalarprodukt oft in der Form  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  geschrieben, also mit einem Punkt. Wir bleiben aber bei den Klammern. Folgende Regeln ergeben sich direkt aus der Formel, wobei  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle && \text{(Symmetrie)} \\ \langle \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z} \rangle &= \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle && \text{(Bilinearität)} \\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &= |\vec{x}|^2 \geq 0 && \text{(Positivität)}. \end{aligned}$$

Um nun die Definition des Winkels zu motivieren, appellieren wir an das Schulwissen und betrachten die gleichförmige Kreisbewegung

$$\vec{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $|\vec{c}(t)| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = 1$  und  $\vec{c}(0) = (1, 0)$ . Der Punkt  $\vec{c}(t)$  durchläuft den Kreis entgegen dem Uhrzeigersinn mit konstanter Absolutgeschwindigkeit Eins:

$$\vec{c}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad |\vec{c}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1.$$

Der Einheitskreis hat die Gesamtlänge  $2\pi = 6,2831\dots$ . Als Maß für den Winkel nehmen wir die Länge des kürzeren Einheitskreisbogens zwischen  $c(t_1)$  und  $c(t_2)$ , also

$$\angle(\vec{c}(t_1), \vec{c}(t_2)) = |t_1 - t_2| \quad \text{falls } |t_1 - t_2| \leq \pi.$$

Die Bedingung  $|t_1 - t_2| \leq \pi$  garantiert, dass der von  $\vec{c}(t)$  auf  $[t_1, t_2]$  durchlaufene Bogen höchstens ein Halbkreis ist. Erhalte mit dem Additionstheorem des Kosinus

$$\cos \angle(\vec{c}(t_1), \vec{c}(t_2)) = \cos |t_1 - t_2| = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2 = \langle \vec{c}(t_1), \vec{c}(t_2) \rangle.$$

**Definition 1.7.1** (Winkel zwischen Vektoren). Seien  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ . Dann definieren wir den Winkel  $\phi = \angle(\vec{x}, \vec{y}) \in [0, \pi]$  durch die Gleichung

$$\cos \phi = \left\langle \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|} \right\rangle.$$

*Spezialfall:*  $\vec{x}, \vec{y}$  sind zueinander senkrecht (orthogonal), genau wenn  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ .

Es ist noch zu begründen, dass die Gleichung in der Definition eine und nur eine Lösung  $\phi$  besitzt. Die Funktion Kosinus ist auf dem Intervall  $[0, \pi]$  streng monoton fallend mit  $\cos 0 = 1$  und  $\cos \pi = -1$  (Bild). Sie nimmt daher jeden Wert in  $[-1, 1]$  genau einmal an. Es bleibt also zu zeigen, dass die rechte Seite in der Definition des Winkels im Intervall  $[-1, 1]$  liegt. Dies ergibt sich aus folgender Ungleichung.

**Satz 1.7.2** (Ungleichung von Cauchy-Schwarz). Für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\vec{x}, \vec{y}$  parallel sind.

*Beweis.* Für Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  mit  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  schätzen wir ab:

$$1 \pm \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \left( |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right) = \frac{1}{2} |\vec{a} \pm \vec{b}|^2 \geq 0.$$

Für  $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$  beliebig wenden wir das an mit  $\vec{a} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ ,  $\vec{b} = \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$ :

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = |\vec{x}| |\vec{y}| |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|.$$

Bei Gleichheit gilt für die Einheitsvektoren

$$0 = \vec{a} \pm \vec{b} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \pm \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|},$$

das heißt  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  sind parallel. □

Die Definition des Winkels ergibt trivial den *Kosinussatz*: in dem von  $\vec{0}, \vec{x}, \vec{y}$  gebildeten Dreieck folgt nämlich

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

Eine Konsequenz der Cauchy-Schwarz Ungleichung ist folgende Eigenschaft des Betrags.

**Satz 1.7.3** (Dreiecksungleichung). Für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  gilt die Ungleichung

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|,$$

mit Gleichheit genau wenn  $\vec{x}, \vec{y}$  gleichsinnig parallel sind.

*Beweis.* Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + |\vec{y}|^2 \leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2.$$

Durch Wurzelziehen folgt  $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$  wie behauptet. Bei Gleichheit müssen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  parallel sein nach Satz 1.7.2. Es muss aber auch  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \geq 0$  sein, also sind  $\vec{x}, \vec{y}$  gleichsinnig parallel. □

Statt auf die Koordinatenachsen können wir einen Vektor  $\vec{x}$  auch auf eine beliebige Ursprungsgerade  $g$  projizieren. Wird  $g$  durch den Einheitsvektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  erzeugt, das heißt  $g = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ , so lautet der Projektionspunkt

$$\vec{x}^g = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \vec{v}.$$

Denn  $\vec{x}^g$  liegt auf der Geraden  $g$ , und  $\vec{x} - \vec{x}^g$  steht senkrecht auf  $g$ :

$$\langle \vec{x} - \vec{x}^g, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle - \langle \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle - \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}_{=1} = 0.$$

Die Zahl  $\cos \angle(\vec{x}, \vec{v})$  wird manchmal als Richtungskosinus von  $\vec{x}$  bezüglich  $\vec{v}$  bezeichnet.

Wir kommen nun zu einer speziellen Struktur des drei-dimensionalen Raums. Das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) ist gegeben durch

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Folgende Regeln sind offensichtlich:

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= -\vec{y} \times \vec{x} \quad (\text{Schiefsymmetrie}) \\ (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) \times \vec{z} &= \lambda \vec{x} \times \vec{z} + \mu \vec{y} \times \vec{z} \quad (\text{Bilinearität}). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $\vec{x} \times \vec{x} = 0$ . Für die Standardvektoren sehen wir

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Man nennt die Vertauschungen 123, 231, 312 zyklisch, 213, 321, 132 antizyklisch. Welcher Vektor ist nun  $\vec{x} \times \vec{y}$ ? Als erstes berechnen wir dazu seine Länge (nachprüfen)

$$\begin{aligned} |\vec{x} \times \vec{y}|^2 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \\ &= |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2. \end{aligned}$$

Mit  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})$  (Definition des Winkel) ergibt sich

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \sqrt{1 - \cos^2 \angle(\vec{x}, \vec{y})} = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

Insbesondere:  $\vec{x} \times \vec{y}$  ist null, wenn  $\angle(\vec{x}, \vec{y}) \in \{0, \pi\}$ , also wenn  $\vec{x}, \vec{y}$  parallel sind (oder null). Sind  $\vec{x}, \vec{y}$  orthogonal, so folgt  $\vec{x} \times \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}|$ .

Ab jetzt seien  $\vec{x}, \vec{y}$  nicht parallel, also  $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$ . Wir berechnen

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2. \quad (1.5)$$

Ist  $\vec{z} = \vec{x}$  oder  $\vec{z} = \vec{y}$ , so ist die rechte Seite Null. Also steht  $\vec{x} \times \vec{y}$  senkrecht auf die von  $\vec{x}, \vec{y}$  aufgespannte Ebene. Da die Länge schon bekannt ist, bleiben nur zwei Vektoren, die sich um den Faktor  $-1$  unterscheiden.

Die rechte Seite von Gleichung (1.5) wird mit  $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  bezeichnet (Determinante). Um sich die Formel zu merken, kann man die Vektoren in ein Schema schreiben und jeweils die Produkte über die Diagonalen bilden. Dabei werden Diagonalen nach rechts unten positiv, Diagonalen nach links unten negativ gezählt (Regel von Sarrus).

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & | & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & | & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & | & z_1 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Die Zahl  $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  wird auch als Spatprodukt der drei Vektoren bezeichnet. Sie ist gleich dem Volumen des von den Vektoren gebildeten Spats (Parallelepipeds), bis auf das Vorzeichen. Das wollen wir aber hier nicht ausführen. Wir vereinbaren:

$$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ sind positiv orientiert, genau wenn } \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) > 0.$$

Beachten Sie, dass es hier auf die Reihenfolge der Vektoren ankommt: werden zwei Vektoren vertauscht, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen. Die Richtung von  $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$  ist dadurch bestimmt, dass die Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$  in dieser Reihenfolge positiv orientiert sind. Denn wählen wir in der Formel für die Determinante  $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ , so ist

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = |\vec{x} \times \vec{y}|^2 > 0.$$

Zum Schluss eine Bemerkung zu Anschauungsraum und  $\mathbb{R}^3$ . Wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem, so werden jedem Vektor  $\vec{v}$  im Raum Koordinaten  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet. Wir bestimmen seine Länge dann mit der Formel  $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Es ist wesentlich, dass wir bei Wahl eines anderen kartesischen Koordinatensystems denselben Wert erhalten. Im  $\mathbb{R}^2$ , wo wir die Umrechnung der Koordinaten kennen, sehen wir das explizit:

$$(x')^2 + (y')^2 = ((\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y)^2 + ((-\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y)^2 = x^2 + y^2.$$

Auch der Winkel zwischen zwei Vektoren im Raum ist unabhängig von der Wahl des kartesischen Koordinatensystems. Beim Vektorprodukt gibt es eine gewisse Einschränkung: wählen wir zum Beispiel die zueinander senkrechten Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der linken Hand in dieser Reihenfolge als Koordinatensystem, so entsprechen ihnen die Standard-Vektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$ . Als Vektorprodukt der ersten beiden Richtungen ergibt sich also  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ . Das Vektorprodukt im Anschauungsraum ist aber durch die Rechte-Hand-Regel gegeben, es zeigt in die entgegengesetzte Richtung. Zur Berechnung des Vektorprodukts müssen wir als Koordinaten ein Rechtssystem wählen: nur dann sind die Orientierung durch die Rechte-Hand-Regel und die Orientierung des  $\mathbb{R}^3$  konsistent.

## 1.8 Die komplexen Zahlen

Wir beginnen mit einer anderen Schreibweise für Punkte des  $\mathbb{R}^2$ . Und zwar setzen wir  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i$ , und haben dann die allgemeine Darstellung

$$z = x + iy \quad \text{für alle } z = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

In diesem Zusammenhang heißen die Punkte des  $\mathbb{R}^2$  komplexe Zahlen (Symbol  $\mathbb{C}$ ). Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind gegeben durch

$$\operatorname{Re} z = x \quad \operatorname{Im} z = y \quad \text{für } z = x + iy.$$

Die Addition in  $\mathbb{C}$  ist die übliche komponentenweise Addition, also

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Für die Multiplikation setzen wir  $i^2 = -1$  und multiplizieren aus:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Um dies zu veranschaulichen, schreiben wir die komplexen Zahlen in Polarkoordinaten: zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$  gibt es ein  $r > 0$  und ein  $\varphi \in \mathbb{R}$  mit

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Dabei ist  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , und  $\varphi \in \mathbb{R}$  ist der Winkel, den  $z$  mit der positiven  $x$ -Achse einschließt. Da die Funktionen  $\cos, \sin$  die Periode  $2\pi$  haben, ist der Winkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  eindeutig bestimmt. Er ist eindeutig, wenn wir  $\varphi \in [0, 2\pi)$  verlangen.

Für die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  gelten dieselben Rechenregeln wie für die reellen Zahlen. Bezüglich der Addition ist  $0 = 0 + i0$  das neutrale Element, und  $-z = -x - iy$  das zu  $z = x + iy$  inverse Element. Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Addition sind klar, denn diese ist einfach die komponentenweise Addition.

Das neutrale Element der Multiplikation ist  $1 = 1 + i0$ , denn

$$z \cdot 1 = (x + iy)(1 + i0) = x + iy.$$

Wir nennen  $\bar{z} = x - iy$  die zu  $z = x + iy$  konjugiert komplexe Zahl. Wegen  $i^2 = -1$  gilt

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 + i(yx - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Damit können wir das zu  $z \neq 0$  inverse Element angeben, und zwar ist

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad \text{denn } z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1.$$

In Polarkoordinaten lautet nun die Multiplikation (Additionstheoreme für  $\cos, \sin$ )

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Das Kommutativgesetz ist damit offensichtlich, und durch Multiplikation mit  $z_3 = r_3(\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3)$  folgt weiter

$$(z_1 z_2) z_3 = r_1 r_2 r_3 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)).$$

Für  $z_1(z_2 z_3)$  kommt dasselbe raus, also gilt das Assoziativgesetz. Schließlich rechnen wir das Distributivgesetz nach:

$$\begin{aligned} (a + ib)((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) &= (a + ib)(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) \\ &= a(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2) + i(b(x_1 + x_2) + a(y_1 + y_2)) \\ &= ax_1 - by_1 + i(bx_1 + ay_1) + ax_2 - by_2 + i(bx_2 + ay_2) \\ &= (a + ib)(x_1 + iy_1) + (a + ib)(x_2 + iy_2). \end{aligned}$$

Wir notieren im Vorbeigehen folgende nützliche Formeln, die sich leicht verifizieren lassen. Für die zweite Gleichung in (1) und für (3) kann man die Polardarstellung von  $z_{1,2}$  verwenden.

$$(1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

(2) Für  $z = x + iy$  ist  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(3)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .

Was ist der Gewinn, den wir von den komplexen Zahlen haben? Allgemein gesagt, sind mit den komplexen Zahlen Gleichungen lösbar, die mit reellen Zahlen nicht lösbar sind. Zum Beispiel gibt es keine reelle Lösung von  $x^2 + q = 0$ , wenn  $q > 0$  ist. In  $\mathbb{C}$  haben wir dagegen die beiden Lösungen  $z_{1,2} = \pm i\sqrt{q}$ <sup>1</sup>. Jede Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  mit  $p, q \in \mathbb{R}$  kann auf das Ziehen einer Wurzel reduziert werden, und hat damit ebenfalls Lösungen. Substituiere dazu  $x = y + a$  und berechne

$$0 = (y + a)^2 + p(y + a) + q = y^2 + (2a + p)y + a^2 + pa + q.$$

Durch Wahl von  $a = -p/2$  ergibt sich

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$y = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q > 0 \\ \pm i\sqrt{-(\frac{p^2}{4} - q)} & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q < 0 \\ 0 & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q = 0. \end{cases}$$

Durch Rückeinsetzen  $x = y - p/2$  ergeben sich die jeweiligen Lösungen für  $x$ .

Komplexe Zahlen traten zuerst in der italienischen Renaissance in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts auf, bei der Lösung von quadratischen und kubischen Gleichungen. Die Bezeichnung  $i = \sqrt{-1}$  stammt von Euler (1777), die Bezeichnung *komplexe Zahl* von Gauß (1831). Er hat auch die Interpretation als Punkte in der Ebene eingeführt.

---

<sup>1</sup>Mit  $\sqrt{x}$  ist immer die nichtnegative Wurzel gemeint

## Kapitel 2

# Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit

### 2.1 Reelle Funktionen

Eine reelle Funktion einer Variablen ist eine Abbildung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \quad \text{wobei } D \subset \mathbb{R}.$$

Der Definitionsbereich  $D$  kann zum Beispiel ganz  $\mathbb{R}$  oder ein Intervall sein. Die Bezeichnung *reelle Funktion* bezieht sich darauf, dass die Werte der Funktion reelle Zahlen sind. Standardbeispiele von Funktionen sind:

$$\begin{array}{ll} \text{lineare Funktionen:} & f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b. \\ \text{quadratische Funktionen:} & f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c. \\ \text{Wurzelfunktion:} & f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}. \end{array}$$

Die Wurzelfunktion kann für  $x < 0$  nicht als reelle Funktion definiert werden. Die Rechenoperationen von  $\mathbb{R}$  lassen sich für Funktionen definieren, genauer setzen wir für  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x)g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{falls } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Sind  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E$ , so ist auch die Verkettung definiert durch

$$g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

In vielen Anwendungen interessiert man sich dafür, wo die Maxima und Minima der Funktion liegen (Extremwerte), und allgemeiner in welchen Bereichen die Funktion anwächst beziehungsweise fällt. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\begin{array}{ll} \text{monoton wachsend:} & x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \\ \text{streng monoton wachsend:} & x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \\ \text{monoton fallend:} & x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \\ \text{streng monoton fallend:} & x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1). \end{array}$$

Zum Beispiel hat die quadratische Funktion  $f(x) = x^2 + px + q$  im Punkt  $x = -p/2$  ein Minimum. Auf dem Intervall  $[-p/2, \infty)$  ist sie streng monoton wachsend, auf  $(-\infty, -p/2]$

streng monoton fallend. Ein weiterer Begriff bezieht sich auf die Symmetrie einer Funktion:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

$$\begin{aligned} \text{gerade:} & \quad f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in D, \\ \text{ungerade:} & \quad f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in D. \end{aligned}$$

Für diese Eigenschaft muss natürlich  $D$  symmetrisch zum Ursprung liegen, zum Beispiel  $D = (-a, a)$ , sonst macht es keinen Sinn. Die quadratische Funktion  $f(x) = x^2 + px + q$  ist genau dann dann gerade, wenn  $p = 0$  ist, und niemals ungerade. Denn

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = px \quad \frac{f(x) + f(-x)}{2} = x^2 + q.$$

## 2.2 Polynome und rationale Funktionen

**Definition 2.2.1.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (reelles) Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}_0$ , wenn es  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gibt mit  $a_n \neq 0$ , so dass

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Die  $a_i \in \mathbb{R}$  heißen Koeffizienten des Polynoms, und  $a_n$  heißt Leitkoeffizient. Ein Polynom vom Grad Null ist nach Definition konstant. Das Nullpolynom (also die Nullfunktion, die Funktion die konstant Null ist) wird separat behandelt<sup>1</sup>.

**Lemma 2.2.2** (Abspalten von Linearfaktoren). *Hat ein Polynom  $f(x)$  vom Grad  $n \in \mathbb{N}$  eine Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , also  $f(\lambda) = 0$ , so gibt es ein Polynom  $g(x)$  (nicht das Nullpolynom) vom Grad  $n - 1$  mit*

$$f(x) = (x - \lambda)g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Sei  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  mit  $a_n \neq 0$ . Im Fall  $\lambda = 0$  folgt  $0 = f(0) = a_0$ , und

$$f(x) = x(a_1 + \dots + a_nx^{n-1}) = xg(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei nun  $f(\lambda) = 0$  für irgendein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Betrachte dann

$$\tilde{f}(x) = f(x + \lambda) = a_0 + a_1(x + \lambda) + \dots + a_n(x + \lambda)^n.$$

Durch Auflösen der Klammern und Ordnen nach Potenzen von  $x$  sehen wir, dass  $\tilde{f}(x)$  Polynom vom Grad  $n$  ist mit Leitkoeffizient  $a_n$ . Aber  $\tilde{f}(0) = f(\lambda) = 0$ , und wie gezeigt gibt es ein Polynom  $\tilde{g}$  vom Grad  $n - 1$  mit  $\tilde{f}(x) = x\tilde{g}(x)$ , beziehungsweise

$$f(x) = \tilde{f}(x - \lambda) = (x - \lambda)\tilde{g}(x - \lambda) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nun ist  $\tilde{g}(x - \lambda)$  ein Polynom vom Grad  $n - 1$ , indem wir wieder Ausmultiplizieren und Umordnen. Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Lemma 2.2.3** (Zahl der Nullstellen). *Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$ . Dann hat  $f$  höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen.*

<sup>1</sup>Manchmal wird dem Nullpolynom der Grad -1 zugeordnet, manchmal der Grad  $-\infty$ .

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n = 0$  ist  $f(x) = a_0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , wobei  $a_0 \neq 0$  wenn  $f$  nicht das Nullpolynom ist, also hat  $f$  keine Nullstelle. Ist  $f$  Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$ , so hat entweder  $f$  keine Nullstelle oder es gilt nach Lemma 2.2.2  $f(x) = (x - \lambda)g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , mit einem Polynom  $g$  vom Grad  $n - 1$ . Nach Induktion hat  $g$  höchstens  $n - 1$  Nullstellen, also  $f$  höchstens  $n$  Nullstellen.  $\square$

**Lemma 2.2.4** (Koeffizientenvergleich). *Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Polynome vom Grad  $m$  bzw.  $n$ , das heißt es gilt mit  $a_m, b_n \neq 0$*

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

*Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  an mehr als  $\max(m, n)$  Stellen gleich, so ist  $m = n$  und  $a_i = b_i$  für  $i = 0, \dots, n$ .*

*Beweis.* Ist  $m \neq n$  oder  $a_i \neq b_i$  für ein  $i$ , so ist  $f - g$  Polynom vom Grad höchstens  $\max(m, n)$ , und hat nach Lemma 2.2.3 höchstens  $\max(m, n)$  Nullstellen.  $\square$

All das hilft uns nicht weiter, wenn ein Polynom einfach keine Nullstellen hat, zum Beispiel  $f(x) = x^2 + 1$ . Um die Sache wirklich zu verstehen, müssen wir ins Komplexe gehen. Ein komplexes Polynom vom Grad  $n$  hat die Form

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad \text{wobei } a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Das Abspalten von Linearfaktoren und der Koeffizientenvergleich gelten in  $\mathbb{C}$  ganz analog, weil nur die gemeinsamen Rechenregeln benutzt wurden. Insbesondere hat auch ein komplexes Polynom höchstens  $n$  Nullstellen. Im Unterschied zum Reellen gilt aber der

**Satz 2.2.5** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe Polynom vom Grad  $n \geq 1$  hat mindestens eine Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .*

Es ist offenbar möglich, dass sich ein Linearfaktor mehrfach von einem Polynom  $f(z)$  abspalten lässt. Wir nennen  $\lambda$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $k \in \mathbb{N}$ , wenn  $f(z) = (z - \lambda)^k g(z)$  für ein Polynom  $g(z)$  mit  $g(\lambda) \neq 0$ .

**Folgerung 2.2.6** (Polynomfaktorisierung). *Ein Polynom  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vom Grad  $n \geq 1$  hat eine Zerlegung*

$$f(z) = a_n \prod_{k=1}^K (z - \lambda_k)^{n_k} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

*Dabei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_K \in \mathbb{C}$  die Nullstellen mit den zugehörigen Vielfachheiten  $n_k \in \mathbb{N}$ , wobei  $n = n_1 + \dots + n_K$ , und  $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist der Leitkoeffizient von  $f(z)$ .*

*Beweis.* Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat  $f(z)$  eine Nullstelle  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ . Durch Abspalten folgt  $f(z) = (z - \lambda_1)f_1(z)$ , wobei  $f_1(z)$  komplexes Polynom vom Grad  $n - 1$  ist. Nun hat  $f_1(z)$  wieder eine Nullstelle  $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ , und so weiter. Der Prozess stoppt genau nach  $n$  Schritten, denn dann hat das Restpolynom den Grad Null, ist also konstant.  $\square$

Wir können nun auf  $\mathbb{R}$  zurückkommen. Jedes reelle Polynom  $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , das heißt  $a_i \in \mathbb{R}$ , kann nämlich als komplexes Polynom aufgefasst werden, indem wir für  $x$  auch komplexe Zahlen  $z$  einsetzen. Damit wird die reelle Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu einer komplexen Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  fortgesetzt. Das Endergebnis lautet so.

**Folgerung 2.2.7** (Polynomfaktorisierung in  $\mathbb{R}$ ). *Jedes reelle Polynom  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $n \geq 1$  zerfällt in lineare und quadratische Faktoren. Genauer gilt*

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^I (x - \lambda_i)^{\ell_i} \prod_{j=1}^J (x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{m_j} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind die  $\lambda_i$  die Nullstellen in  $\mathbb{R}$  und die  $\alpha_j \pm i\beta_j$  die Nullstellen in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , mit jeweiligen Vielfachheiten  $\ell_i$  bzw.  $m_j$ , also  $n = \ell_1 + \dots + \ell_I + 2(m_1 + \dots + m_J)$ .

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $f(x)$  keine reellen Nullstellen hat, sonst spalten wir die zugehörigen Linearfaktoren ab; diese liefern dann das erste Produkt. Weiter gilt: ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle, so auch  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ . Wegen  $a_i \in \mathbb{R}$  gilt nämlich

$$0 = \overline{f(\lambda)} = \overline{a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n} = a_0 + a_1 \bar{\lambda} + \dots + a_n \bar{\lambda}^n = f(\bar{\lambda}).$$

Wir können nun in  $\mathbb{C}$  nacheinander  $z - \lambda$  und  $z - \bar{\lambda}$  als Faktoren abspalten, und erhalten ein Polynom  $g(z)$  vom Grad  $n - 2$  mit

$$f(z) = (z - \lambda)(z - \bar{\lambda})g(z) = (z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2)g(z).$$

Jetzt machen wir mit dem Restpolynom  $g(z)$  weiter und erhalten schließlich die gewünschte Zerlegung in quadratische Faktoren. Ein Detail fehlt: es ist zu begründen, dass  $g(z)$  wieder reelle Koeffizienten hat! Sei

$$g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-2} z^{n-2}, \quad \text{mit zunächst } b_i \in \mathbb{C}.$$

Wir setzen in  $f(z)$  nun  $x \in \mathbb{R}$  als Variable ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} f(x) \quad (\text{da } f \text{ reelle Koeffizienten hat}) \\ &= \operatorname{Im} \left( (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) g(x) \right) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) \operatorname{Im} g(x) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) \sum_{i=0}^{n-2} (\operatorname{Im} b_i) x^i. \end{aligned}$$

Die linke Klammer ist für  $x \in \mathbb{R}$  niemals Null. Also verschwindet die Summe für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und es folgt  $\operatorname{Im} b_i = 0$  für alle  $i = 0, \dots, n - 2$  aus Lemma 2.2.3.  $\square$

Die Existenz einer Nullstelle ist in  $\mathbb{C}$  durch Satz 2.2.5 gesichert. Dieser Satz liefert aber keinen Anhaltspunkt, wie die Nullstellen tatsächlich berechnet werden sollen. Mit Substitutionen und Ziehen von  $k$ -ten Wurzeln kommt man ab Grad  $n \geq 5$  im allgemeinen nicht zum Ziel (Abel 1825). Deshalb spielen numerische Lösungsverfahren eine große Rolle, durch die die Nullstelle approximativ bestimmt wird. Darauf kommen wir zurück, wenn wir die Analysis weiter entwickelt haben.

Eine rationale Funktion  $f$  ist definiert als Quotient zweier Polynome. Seien genauer  $p(x)$  und  $q(x)$  reelle Polynome vom Grad  $m$  bzw.  $n$ , und  $N_q$  sei die endliche Menge der Nullstellen von  $q$ . Dann ist

$$f : \mathbb{R} \setminus N_q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Es ist praktisch, rationale Funktionen folgendermaßen zu zerlegen.

**Lemma 2.2.8.** Seien  $p(x) = a_m x^m + \dots + a_0$  und  $q(x) = b_n x^n + \dots + b_0$  Polynome mit  $m \geq n$ . Dann hat gibt es eindeutig bestimmte Polynome  $g(x)$  und  $r(x)$  mit  $r(x)$  vom Grad  $k < n$ , eventuell  $r(x)$  das Nullpolynom, mit

$$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus N_q.$$

*Beweis.* Durch Division mit Rest für Polynome. Wir schreiben

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{m-n} + \frac{p_1(x)}{q(x)} \quad \text{mit } p_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{m-n} q(x).$$

Es gilt  $\text{grad } p_1 < m$ . Im Fall  $m = n$  gilt die Behauptung also mit  $r(x) = p_1(x)$ . Für  $m > n$  können wir per Induktion annehmen, dass

$$\frac{p_1(x)}{q(x)} = g_1(x) + \frac{r_1(x)}{q(x)} \quad \text{mit } \text{grad } r_1 < n,$$

eventuell  $r_1 \equiv 0$ . Es folgt die gewünschte Zerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{m-n} + g_1(x) + \frac{r_1(x)}{q(x)}.$$

Zur Eindeutigkeit: Angenommen die Zerlegung gilt mit  $g_1, r_1$  und  $g_2, r_2$ . Dann folgt durch Subtraktion und Multiplikation mit  $q(x)$

$$(g_1(x) - g_2(x))q(x) + r_1(x) - r_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus N_q.$$

Wäre  $g_1 - g_2$  nicht Null, so ist die linke Seite ein Polynom vom Grad mindestens  $n$ , aber mit unendlich vielen Nullstellen. Das kann nicht sein wegen Lemma 2.2.3. Analog sehen wir, dass die Polynome  $r_{1,2}$  gleich sind.  $\square$

*Beispiel.* Hier ein Beispiel für die Polynomdivision:

$$\begin{array}{rcll} x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 & : & x^2 + 2x & = & x^2 & \text{Rest } & -3x^3 + x^2 - x + 1 \\ -3x^3 + x^2 - x + 1 & : & x^2 + 2x & = & -3x & \text{Rest } & 7x^2 - x + 1 \\ 7x^2 - x + 1 & : & x^2 + 2x & = & 7 & \text{Rest } & -15x + 1 \end{array}$$

Also haben wir hier

$$\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^2 + 2x} = x^2 - 3x + 7 - \frac{15x - 1}{x^2 + 2x}.$$

Die Ausnahmestellen  $\lambda \in N_q$  in der Definition von  $f(x)$  sind natürlich von Interesse. Sei  $\lambda$  eine  $m$ -fache Nullstelle von  $q(x)$  und eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p(x)$ . Im Fall  $p(x) \neq 0$  ist  $k = 0$ . Es gibt nun Polynome  $p_1(x), q_1(x)$  mit  $p_1(\lambda), q_1(\lambda) \neq 0$  und

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - \lambda)^k p_1(x)}{(x - \lambda)^m q_1(x)} = (x - \lambda)^{k-m} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus N_q.$$

Abhängig von dem Exponenten  $k - m$  sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) Ist  $k \geq m$ , so kann  $f(x)$  auch im Punkt  $\lambda$  sinnvoll definiert werden, und zwar durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} & \text{falls } k = m, \\ 0 & \text{falls } k > m. \end{cases}$$

Wir nennen  $\lambda$  eine *hebbare Singularität* von  $f(x)$ .

(2) Ist  $k < m$ , so nennen wir  $\lambda$  eine *Polstelle* von  $f(x)$ . Das Verhalten von  $|f(x)|$  in der Polstelle wird im wesentlichen durch den Faktor  $|x - \lambda|^{k-m}$  bestimmt, der gegen Unendlich geht.

## 2.3 Kreisfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind bereits mehrfach aufgetreten. Wir wollen sie hier mit ihren Eigenschaften nochmal ausführlich besprechen. Sei  $D_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Drehung um den Winkel  $x \in \mathbb{R}$ , gemessen in Bogenmaß. Dabei drehen wir im mathematisch positiven Sinn (das heißt entgegen dem Uhrzeigersinn), wenn  $x \geq 0$ , im mathematisch negativen Sinn für  $x < 0$ . Es gilt (vgl. Abschnitt I.4 und Bild)

$$D_x \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad D_x \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Aus der Interpretation am Einheitskreis lassen sich die Eigenschaften von  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  leicht ablesen. Als erstes haben wir

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Beachte  $\cos^2 x = (\cos x)^2$ . Es folgt auch  $-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1$ . Weiter

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x & (\cos \text{ ist gerade}) \\ \sin(-x) &= -\sin x & (\sin \text{ ist ungerade}) \end{aligned}$$

Drehung um den Vollwinkel  $2\pi$  ist die Identität, daher sind die Funktionen  $2\pi$ -periodisch:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Nullstellen der Funktionen sind

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}\pi \\ \cos x = 0 &\Leftrightarrow x \in (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Um die Additionstheoreme zu zeigen, brauchen wir, dass die Drehung  $D_x$  eine lineare Abbildung ist. Das bedeutet, dass sie sich mit der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation verträgt, genauer behaupten wir für beliebige  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$D_x(\vec{v} + \vec{w}) = D_x \vec{v} + D_x \vec{w} \quad D_x(\lambda \vec{v}) = \lambda D_x \vec{v}.$$

Für die erste Eigenschaft beachten wir, dass  $\vec{v} + \vec{w}$  der vierte Eckpunkt in dem von  $\vec{0}, \vec{v}, \vec{w}$  gebildeten Parallelogramm ist. Drehung mit  $D_x$  ergibt daher den vierten Eckpunkt in dem gedrehten Parallelogramm, das von  $\vec{0}, D_x \vec{v}, D_x \vec{w}$  gebildet wird, also den Punkt  $D_x \vec{v} + D_x \vec{w}$ . Für  $\lambda > 0$  hat der Vektor  $D_x(\lambda \vec{v})$  dieselbe Richtung wie  $\lambda D_x \vec{v}$ . Da die Drehung längentreu ist, sind die Vektoren gleich. Schließlich kann man für  $\lambda = -1$  argumentieren, dass  $D_x(-\vec{v}) = D_x D_\pi \vec{v} = D_\pi D_x \vec{v} = -D_x \vec{v}$ .

**Satz 2.3.1** (Additionstheoreme). *Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y.\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir berechnen mit  $D_{x+y} = D_y \circ D_x$  berechnen wir

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos(x+y) \\ \sin(x+y) \end{pmatrix} &= D_{x+y} \vec{e}_1 \\ &= D_y(D_x \vec{e}_1) \quad (\text{da } D_{x+y} = D_y \circ D_x) \\ &= D_y((\cos x) \vec{e}_1 + (\sin x) \vec{e}_2) \\ &= (\cos x) D_y \vec{e}_1 + (\sin x) D_y \vec{e}_2 \quad (\text{wegen } D_y \text{ linear}) \\ &= \cos x \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix} + \sin x \begin{pmatrix} -\sin y \\ \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Im Spezialfall  $y = \pm \frac{\pi}{2}$  ist

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{bzw.} \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x.$$

Es lassen sich viele weitere nützliche Formeln aus den Additionstheoremen herleiten (siehe Übungsaufgaben).

**Definition 2.3.2.** Die Tangens- bzw. Cotangensfunktion ist definiert durch

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{für } x \neq (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{für } x \neq \mathbb{Z}\pi.\end{aligned}$$

Für die Funktionen  $\tan$  und  $\cot$  ergeben sich folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\tan(-x) &= -\tan x \quad (\tan \text{ ist ungerade}) \\ \cot(-x) &= -\cot x \quad (\cot \text{ ist ungerade}) \\ \tan(x + \pi) &= \tan x \quad (\tan \text{ hat Periode } \pi) \\ \cot(x + \pi) &= \cot x \quad (\cot \text{ hat Periode } \pi)\end{aligned}$$

Wir kommen an diesem Punkt auf die Polardarstellung komplexer Zahlen zurück. Jeder Zahl  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , hat eine Darstellung

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{mit } r > 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wir führen folgende Abkürzung ein:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{Eulersche Formel}).$$

Was soll diese Notation? Die aus der Schule bekannte Exponentialfunktion erfüllt folgendes Funktionalgesetz, das in der Schule im Rahmen der Potenzrechnung hergeleitet wird:

$$e^{\lambda(x+y)} = e^{\lambda x + \lambda y} = e^{\lambda x} e^{\lambda y} \quad \text{wobei } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Genau dieses Gesetz gilt auch für  $e^{ix}$ , nur dass  $\lambda \in \mathbb{R}$  durch die komplexe Zahl  $i \in \mathbb{C}$  ersetzt ist, und zwar folgt es aus den Additionstheoremen:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= e^{ix} e^{iy}. \end{aligned}$$

Umgekehrt lassen sich die Additionstheoreme aus der Regel  $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$  mühelos herleiten. Mit Schulwissen können wir zusätzlich die Ableitungen der Funktionen  $e^{\lambda x}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) und  $e^{ix}$  bei  $x = 0$  vergleichen. Es gilt

$$\begin{aligned} (e^{\lambda x})'(0) &= \lambda e^{\lambda x}|_{x=0} = \lambda \\ (e^{ix})'(0) &= \cos'(0) + i \sin'(0) = i. \end{aligned}$$

Damit ist die als Notation eingeführte Eulersche Formel gut begründet. Die Polardarstellung hat die endgültige Form

$$z = r e^{i\varphi} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

**Satz 2.3.3** (de Moivre). Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gelten die Formeln

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix} e^{iy} \quad (\text{Funktionalgleichung}) \\ \overline{e^{ix}} &= e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}} \\ e^{inx} &= (e^{ix})^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Funktionalgleichung wurde oben hergeleitet. Die zweite Gleichung gilt wegen

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x = e^{-ix} \quad \text{und} \quad e^{ix} e^{-ix} = e^{i0} = 1.$$

Die dritte Formel ist klar für  $n = 1$ , und per Induktion ergibt sich

$$e^{i(n+1)x} = e^{inx+ix} = e^{inx} e^{ix} = (e^{ix})^n e^{ix} = (e^{ix})^{n+1}.$$

□

Zur Berechnung des Winkels zwischen Vektoren sowie der Polardarstellung komplexer Zahlen wird die Umkehrfunktion des Kosinus gebraucht. Dazu müssen wir ein Intervall auswählen, auf dem der Kosinus injektiv ist, üblicherweise

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1].$$

Die Funktion  $\cos$  ist auf  $[0, \pi]$  streng monoton fallend und damit injektiv:

$$0 \leq x < y \leq \pi \quad \Rightarrow \quad \cos x > \cos y.$$

Das ist anschaulich am Einheitskreis klar, rigoros rechnen wir

$$e^{iy} - e^{ix} = e^{i\frac{y+x}{2}} \left( e^{i\frac{y-x}{2}} - e^{-i\frac{y-x}{2}} \right) = 2ie^{i\frac{y+x}{2}} \sin \frac{y-x}{2}.$$

Bilden wir die Realteile, so folgt wegen  $\sin t > 0$  für  $t \in (0, \pi)$

$$\cos y - \cos x = -2 \underbrace{\sin \frac{y+x}{2}}_{\in (0, \pi)} \underbrace{\sin \frac{y-x}{2}}_{\in (0, \pi)} < 0.$$

Wir definieren nun die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \cos(\arccos t) = t.$$

Natürlich gilt auch  $\arccos(\cos x) = x$  für  $x \in [0, \pi]$ . Damit können wir die Polarkoordinaten von  $z = x + iy \neq 0$  angeben:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

Die trigonometrischen Funktionen sind von Bedeutung für die Beschreibung von Schwingungen und periodischen Prozessen.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodisch mit Periode  $T > 0$ , falls

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ist  $T > 0$  Periode von  $f$ , so auch alle Zahlen  $kT$  mit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Wenn man von *der* Periode einer Funktion spricht, so meint man die kleinstmögliche Periode. Eine harmonische Schwingung, abhängig von der Zeit  $t > 0$ , ist von der Form

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Die Schwingungsdauer, also die Periode der Schwingung, ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Weitere Größen sind die Frequenz  $\nu = \frac{1}{T}$ , die Amplitude  $A > 0$  und der Phasenwinkel  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die Zahl  $\omega$  bezeichnet man auch als Kreisfrequenz.

Die Überlagerung (Superposition) zweier Schwingungen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  ist durch  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  gegeben. Im allgemeinen ist eine solche Überlagerung nicht periodisch. Ausnahme ist der Fall

$$\frac{T_2}{T_1} \in \mathbb{Q}, \text{ also } \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2} \text{ mit } n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Dann haben die Funktionen die gemeinsame Periode  $n_1 T_1 = n_2 T_2$ . Für die Frequenzen folgt  $\nu_1/\nu_2 = n_1/n_2$  beziehungsweise  $\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2$ .

**Satz 2.3.4.** Seien  $x_{1,2}(t)$  harmonische Schwingungen mit derselben Schwingungsdauer, also

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Dann ist  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  wieder eine harmonische Schwingung, genauer gilt

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{mit } Ae^{i\alpha} = A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}.$$

*Beweis.* Es ist praktisch, ins Komplexe zu gehen. Definiere

$$z_1(t) = A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} \quad z_2(t) = A_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}$$

Wir berechnen

$$z_1(t) + z_2(t) = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}) = A e^{i\alpha} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Durch Bilden des Realteils folgt

$$x_1(t) + x_2(t) = \operatorname{Re}(z_1(t) + z_2(t)) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Damit ist die Behauptung schon verifiziert. □

## 2.4 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Eine Folge reeller Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ist streng genommen eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$ . Jedem  $n \in \mathbb{N}$  wird das  $n$ -te Folgenglied  $a_n \in \mathbb{R}$  zugeordnet. Um eine Folge zu definieren, kann man entweder die ersten soundsoviel Folgenglieder angeben, oder ein Bildungsgesetz oder eine Rekursionsvorschrift. Zum Beispiel für die Folge der Quadratzahlen:

*erste Folgenglieder:*  $a_n = 1, 4, 9, 16, \dots$

*Bildungsgesetz:*  $a_n = n^2$  für  $n \in \mathbb{N}$

*Rekursionsvorschrift:*  $a_{n+1} = (\sqrt{a_n} + 1)^2$  und  $a_1 = 1$ .

Bei manchen Folgen ist es sinnvoll, die Nummerierung bei  $n = 0$  zu beginnen statt bei  $n = 1$ . Weitere Beispiele von Folgen sind:

- |     |                                   |   |
|-----|-----------------------------------|---|
| (1) | $a_n = a$                         | konstante Folge $a, a, a, \dots$                    |
| (2) | $a_n = n$                         | Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$       |
| (3) | $a_n = a_0 + nd, n = 0, 1, \dots$ | arithmetische Folge $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \dots$ |
| (4) | $a_n = a_0 q^n, n = 0, 1, \dots$  | geometrische Folge $a_0, a_0 q, a_0 q^2, \dots$     |
| (5) | $a_n = n a_{n-1}, a_0 = 1$        | $1, 1, 2, 6, 24, \dots$ bzw. $a_n = n!$             |

**Definition 2.4.1** (Konvergenz). Die Folge  $a_n$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $n > N$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

$a$  heißt Grenzwert der Folge. Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Die Folge  $a_n$  heißt konvergent, wenn sie gegen irgendein  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Divergent bedeutet nicht konvergent.

Die Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt vor, wie groß der Fehler zwischen  $a_n$  und  $a$  höchstens sein soll. In der Regel werden die ersten Folgenglieder das nicht leisten. Es soll aber – so die Definition der Konvergenz – eine Schranke  $N$  geben, so dass für alle  $n > N$  die verlangte Genauigkeit erfüllt wird. Für ein kleineres  $\varepsilon > 0$  müssen wir  $N$  typischerweise vergrößern, um die  $\varepsilon$ -Genauigkeit zu erreichen, das heißt  $N$  hängt von  $\varepsilon > 0$  ab. Mit den Quantoren  $\forall$  (für alle),  $\exists$  (existiert) und  $\Rightarrow$  (daraus folgt) lässt sich die Definition der Konvergenz auch wie folgt fassen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} : \left( n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \right).$$

*Beispiel* (Harmonische Folge). Die Folge  $a_n = 1/n$  konvergiert gegen  $a = 0$ . Denn zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $N = 1/\varepsilon$ . Es folgt für alle  $n > N$

$$|a_n - a| = |1/n - 0| = 1/n < 1/N = \varepsilon.$$

*Beispiel* (Konstante Folge). Ist  $a_n = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Denn für  $\varepsilon > 0$  gilt  $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$  für alle  $n > 0$ , also können wir  $N = 0$  wählen.

*Beispiel* (Geometrische Folge). Sei  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . Um das zu zeigen, können wir  $q \neq 0$  voraussetzen und haben dann  $1/|q| > 1$ , also gilt  $1/|q| = 1 + x$  für ein  $x > 0$ . Es folgt mit der Bernoulli-Ungleichung, Satz 1.6.2,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon$$

für alle  $n > 1/(\varepsilon x)$ . Wir können also  $N = 1/(\varepsilon x)$  wählen.

*Beispiel* (Plusminusfolge). Die Folge  $a_n = (-1)^n$  ist nicht konvergent. Denn es gilt für jedes  $a \in \mathbb{R}$

$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die rechte Seite müsste aber für große  $n$  klein sein.

Bei der Wahl von  $N$  kommt es nicht drauf an, dass die Schranke kleinstmöglich ist. Dies ist anders, wenn ein Grenzwert numerisch berechnet werden soll, weil dann die Geschwindigkeit der Konvergenz ein Thema ist. Für den Nachweis der Konvergenz an sich reicht es völlig, irgendeine Schranke zu finden. Ist  $N < N'$  und gilt  $|a_n - a| < \varepsilon$  für  $n > N$ , so erst recht für  $n > N'$ . Wir können also  $N$  stets vergrößern. Zum Beispiel können wir statt  $N$  den nächsten Folgenindex  $n_0 \in (N, N + 1]$  wählen.

Der Grenzwert wird anschaulicher, indem wir folgende Teilmengen von  $\mathbb{R}$  einführen.

**Definition 2.4.2** ( $\varepsilon$ -Umgebung). Die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a \in \mathbb{R}$  ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}.$$

Eine Folge  $a_n$  konvergiert genau dann gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn die Folgenglieder ab einer gewissen Nummer in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  liegen, egal wie klein  $\varepsilon > 0$  gewählt ist.

Manchmal ist diese Beschreibung der Konvergenz praktischer. Zum Beispiel verwenden wir sie, um die Eindeutigkeit des Grenzwerts zu zeigen.

**Satz 2.4.3** (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *Ist die Folge  $a_n$  konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.*

*Beweisidee:* Angenommen die Folge  $a_n$  hat zwei Grenzwerte  $a \neq a'$ . Wir wählen  $\varepsilon = |a - a'|/2 > 0$ . Dann sollten ab einem hinreichend großen  $n$  alle Folgenglieder sowohl in dem  $\varepsilon$ -Intervall um  $a$  als auch in dem  $\varepsilon$ -Intervall um  $a'$  sein – deren Schnittmenge ist aber leer.

**Definition 2.4.4.** Eine reelle Folge  $a_n$  heißt beschränkt, wenn es ein  $K \geq 0$  gibt mit

$$|a_n| \leq K \quad \text{für alle } n.$$

Genauer kann noch wie folgt differenziert werden:

$$\begin{aligned} a_n \text{ nach unten beschränkt} &\Leftrightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \geq K_1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ a_n \text{ nach oben beschränkt} &\Leftrightarrow \exists K_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \leq K_2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Folge  $a_n$  ist genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Denn aus  $|a_n| \leq K$  folgt  $-K \leq a_n \leq K$ . Umgekehrt folgt aus  $K_1 \leq a_n \leq K_2$ , dass

$$a_n \leq K_2 \leq |K_2| \quad \text{und} \quad -a_n \leq -K_1 \leq |K_1|,$$

also  $|a_n| \leq \max(|K_1|, |K_2|)$ .

*Beispiel.* Die Folge  $a_n = n$  ist nach unten beschränkt, denn es ist zum Beispiel  $a_n \geq 0$  für alle  $n$ . Sie ist aber nicht nach oben beschränkt.

Überlegen Sie, welche der obigen Folgen (nach oben bzw. unten) beschränkt sind!

**Satz 2.4.5** (konvergent  $\Rightarrow$  beschränkt). *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

*Beweis.* Sei  $a_n \rightarrow a$  mit  $a \neq \infty$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n > N$ . Dann folgt aus der Dreiecksungleichung  $|a_n| \leq |a| + 1$  für  $n > N$ , also

$$|a_n| \leq \max(|a_1|, \dots, |a_N|, |a| + 1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

Nächstes Ziel:

**Satz 2.4.6** (Rechenregeln für Grenzwerte). *Es gelte  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  mit  $n \rightarrow \infty$ .*

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$  für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ .
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = a/b$ , falls  $b \neq 0$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit dem Beweis von b). Nach Satz 2.4.5 gibt es ein  $K > 0$  mit  $|a_n| \leq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und außerdem mit  $|b| \leq K$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &\leq K(|a_n - a| + |b_n - b|). \end{aligned}$$

Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es nun ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \varepsilon/(2K)$  sowie  $|b_n - b| < \varepsilon/(2K)$  für  $n > N$ . Also folgt für  $n > N$

$$|a_n b_n - ab| < K \left( \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} \right) = \varepsilon.$$

Für a) reicht es wegen b), den Fall  $\lambda = \mu = 1$  zu betrachten. Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \varepsilon/2$  und  $|b_n - b| < \varepsilon/2$  für  $n > N$ . Es folgt für  $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für c) behandeln wir erst den Fall  $a_n = b = 1$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$|b_n - 1| \leq \frac{1}{2} \min(\varepsilon, 1) \text{ für } n > N.$$

Dann folgt  $|b_n| = |1 - (1 - b_n)| \geq 1 - |1 - b_n| \geq \frac{1}{2}$ , und weiter

$$\left| \frac{1}{b_n} - 1 \right| = \frac{|1 - b_n|}{|b_n|} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für  $a_n$  und  $b \neq 0$  beliebig schließen wir mit  $b'_n = b_n/b \rightarrow 1$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b} \cdot \frac{1}{b'_n} \rightarrow \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}.$$

□

Hier zwei Anwendungen der Rechenregeln für Grenzwerte.

*Beispiel* (geometrische Reihe). Für  $-1 < q < 1$  betrachten wir die Folge

$$a_n = 1 + q + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k.$$

Dann ergibt sich aus Beispiel 1.6.3, Beispiel 2.4 und Satz 2.4.6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Wir schreiben hierfür auch  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1/(1 - q)$ . Folgen, deren Folgenglieder Summen sind, heißen Reihen. Sie spielen eine große Rolle in der Analysis und werden in Kürze ausführlicher untersucht.

*Beispiel* (Grenzwerte rationaler Funktionen). Betrachte die Folge

$$x_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{b_\ell n^\ell + b_{\ell-1} n^{\ell-1} + \dots + b_0} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wobei  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$  mit  $a_k, b_\ell \neq 0$ . Durch Ausklammern folgt

$$x_n = n^{k-\ell} \frac{a_k + a_{k-1} n^{-1} + \dots + a_0 n^{-k}}{b_\ell + b_{\ell-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-\ell}} \rightarrow \begin{cases} a_k/b_\ell & \text{falls } k = \ell, \\ 0 & \text{falls } k < \ell \\ \pm\infty & \text{falls } k > \ell, \text{ sign } \frac{a_k}{b_\ell} = \pm 1. \end{cases}$$

Siehe Definition 2.4.8 für den Begriff der (uneigentlichen) Konvergenz gegen  $\pm\infty$ .

**Satz 2.4.7** (Grenzwerte und Ungleichungen). *Seien  $a_n$  und  $b_n$  konvergent, mit Grenzwerten  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gelten folgende Aussagen:*

- a) *Ist  $a_n \leq b_n$  für alle  $n$ , so folgt  $a \leq b$ .*
- b) *Gilt  $c \leq a_n \leq d$  für alle  $n$  mit  $c, d \in \mathbb{R}$ , so folgt  $c \leq a \leq d$ .*
- c) *Ist  $a_n \leq c_n \leq b_n$  und gilt  $a = b$ , so konvergiert auch die Folge  $c_n$  gegen  $a = b$ .*

*Beweis.* Da  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ , gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{R}$  mit  $a_n > a - \varepsilon$  und  $b_n < b + \varepsilon$  für alle  $n > N$ . In a) folgt

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon \quad \text{für } n > N,$$

also  $a < b + 2\varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ , das heißt  $a \leq b$ . Aussage b) folgt unmittelbar aus a), indem wir  $c, d$  als konstante Folgen auffassen. Unter den Voraussetzungen in c) gilt für  $n > N$  die Ungleichungskette

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < b + \varepsilon = a + \varepsilon,$$

also  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$  nach Definition des Grenzwerts. □

**Achtung:** Aus  $a_n < b_n$  folgt *nicht*  $a < b$ , sondern nur  $a \leq b$ . Die Striktheit von Ungleichungen geht beim Übergang zu Grenzwerten im allgemeinen verloren. Zum Beispiel gilt  $1/n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ .

*Beispiel* ( $n$ -te Wurzel). Sei  $a > 0$ . Wir bezeichnen mit  $a^{1/n}$  oder  $\sqrt[n]{a}$  die positive Lösung der Gleichung  $x^n = a$ . Es gibt nur eine, denn für  $x, y > 0$  mit  $x > y$  gilt auch  $x^n > y^n$ . Zur Konstruktion der Lösung kann das Intervallhalbierungsverfahren benutzt werden (vgl. Kapitel I, Abschnitt 2). Wir behaupten nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1.$$

Im Fall  $a \geq 1$  ist auch  $a^{1/n} \geq 1$ , also  $a^{1/n} = 1 + x_n$  mit  $x_n \geq 0$ . Die Bernoulli-Ungleichung, Satz 1.6.2, liefert

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n} \rightarrow 0.$$

Mit Satz 2.4.7 c) folgt  $x_n \rightarrow 0$  bzw.  $a^{1/n} \rightarrow 1$ . Für  $0 < a < 1$  folgt wegen  $a^{-1} > 1$

$$a^{1/n} = \frac{1}{(a^{-1})^{1/n}} \rightarrow 1 \quad \text{nach Satz 2.4.6 c).}$$

**Definition 2.4.8** (Uneigentliche Konvergenz). Die Folge  $a_n$  konvergiert uneigentlich (oder divergiert bestimmt) gegen  $+\infty$ , falls gilt:

Zu jedem  $K > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{R}$ , so dass  $a_n > K$  für alle  $n > N$ .

Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  oder  $a_n \rightarrow +\infty$  mit  $n \rightarrow \infty$ . Uneigentliche Konvergenz gegen  $-\infty$  ist analog definiert.

*Beispiel.* Für  $q > 1$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ . Denn zu gegebenem  $K > 0$  gibt es nach Beispiel 2.4 ein  $N \in \mathbb{R}$  mit  $(1/q)^n < 1/K$  für  $n > N$ , also  $q^n > K$  für  $n > N$ . Insgesamt haben wir für das Verhalten der Folge  $q^n$  mit  $n \rightarrow \infty$  folgende Tabelle:

$$\begin{aligned} q > 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty, \\ q = 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1, \\ -1 < q < 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \\ q \leq -1 &\Rightarrow \text{nicht konvergent.} \end{aligned}$$

Der Fall  $-1 < q < 1$  wurde in Beispiel 2.4 behandelt. Für  $q \leq -1$  vergleiche Beispiel 2.4.

*Beispiel* (Harmonische Reihe). Die Folge  $a_n = \sum_{k=1}^n 1/k$  ist bestimmt divergent gegen  $+\infty$ . Dies zeigen wir, indem wir wie folgt Klammern setzen:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right)}_{\geq 1/2} + \dots$$

Die Summe der  $1/k$  mit  $2^m \leq k < 2^{m+1}$  ist größer als  $2^m \cdot 2^{-(m+1)} = 1/2$ .

**Satz 2.4.9** (Konvergenz von Kehrwerten). Für eine Folge  $a_n$  gilt:

- (1) Aus  $a_n \rightarrow +\infty$  (bzw.  $a_n \rightarrow -\infty$ ) folgt  $1/a_n \rightarrow 0$ .
- (2) Aus  $a_n \rightarrow 0$  und  $a_n > 0$  (bzw.  $a_n < 0$ ) folgt  $1/a_n \rightarrow +\infty$  (bzw.  $1/a_n \rightarrow -\infty$ ).

*Beweis.* Übung. □

Das Ziel der Analysis ist es, neue Objekte – Zahlen, Funktionen, Operationen – durch Grenzprozesse zu konstruieren. Unsere Definition des Grenzwerts setzt voraus, dass wir den Grenzwert  $a$  der Folge bereits kennen, damit können wir noch nichts Neues definieren. Hier kommt das Vollständigkeitsaxiom ins Spiel. Wir brauchen eine leicht abgeänderte Fassung.

**Satz 2.4.10** (Konvergenz monotoner Folgen). *Sei  $a_n$  nach oben beschränkt und monoton wachsend, also  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ . Dann ist die Folge  $a_n$  konvergent.*

*Beweis.* Setze  $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Es gilt  $a \in \mathbb{R}$ , weil die Folge nach oben beschränkt ist. Nach Definition des Supremums gibt es zu  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_N > a - \varepsilon$ , also gilt

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a \quad \text{für } n \geq N.$$

Dies bedeutet  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . □

**Satz 2.4.11** (Definition der Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als der Grenzwert*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

*Insbesondere existiert dieser Grenzwert.*

*Beweis.* Sei  $x \in \mathbb{R}$  fest gegeben. Wir müssen zeigen, dass die Folge der Summen

$$\exp_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

konvergiert. Wähle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m + 1 \geq 2|x|$ . Für die Summanden  $k \geq m + 1$  folgt

$$\frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \frac{|x|^{k-(m+1)}}{(m+1)^{k-(m+1)}} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{2^{k-(m+1)}}. \quad (2.2)$$

Für  $n \geq m + 1$  folgt mit Dreiecksungleichung und Abschätzung der geometrischen Summe

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-(m+1)}} \right) \leq \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (2.3)$$

Es folgt, immer noch für  $m + 1 \geq 2|x|$ ,

$$|\exp_n(x) - \exp_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{für alle } n \geq m + 1. \quad (2.4)$$

Die rechte Seite ist eine Konstante  $K = K(x, m)$ , also unabhängig von  $n$ . Da  $\exp_m(x)$  ebenfalls nicht von  $n$  abhängt, ist die Folge  $\exp_n(x)$  beschränkt. Für  $x \geq 0$  ist sie monoton wachsend, also konvergent nach Satz 2.4.10. Für  $x < 0$  kann man in gerade und ungerade  $k$  aufspalten, und dann wieder die Monotonie verwenden: es gilt  $E_n(x) = E_n^+(x) + E_n^-(x)$  mit

$$E_n^+(x) = \sum_{k \leq n, k \text{ gerade}} \frac{x^k}{k!} \quad E_n^-(x) = \sum_{k \leq n, k \text{ ungerade}} \frac{x^k}{k!}.$$

Die  $E_n^\pm(x)$  sind monoton wachsend bzw. fallend, konvergieren also wieder nach Satz 2.4.10. Aus (2.4) erhalten wir noch mit  $n \rightarrow \infty$  für  $m + 1 \geq 2|x|$  die Abschätzung

$$|\exp(x) - \exp_m(x)| \leq \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{für } m + 1 \geq 2|x|. \quad (2.5)$$

Mit  $m \rightarrow \infty$  geht die rechte Seite gegen Null nach (2.2). □

Die Exponentialfunktion beschreibt das natürliche Wachstum. Wir erläutern das am (weniger natürlichen) Beispiel der Zinseszinsrechnung. Wird ein Euro für ein Jahr mit einem Zinssatz  $x \in \mathbb{R}$  angelegt, so beträgt die Ausszahlung  $a_1(x) = 1 + x$ . Die Idee des Zinseszinses ist es, den Zeitraum in kürzere Abschnitte zu unterteilen und den Zins anteilig pro Abschnitt anzurechnen mit dem Effekt, dass der schon angerechnete Teil des Zinses seinerseits Zinsen produziert. Zum Beispiel ergibt das bei monatlicher Verzinsung nach einem Monat  $1 + \frac{x}{12}$ , nach zwei Monaten  $(1 + \frac{x}{12})(1 + \frac{x}{12}) = (1 + \frac{x}{12})^2$ , und nach zwölf Monaten  $a_{12}(x) = (1 + \frac{x}{12})^{12}$ . Allgemein ergibt sich nach einem Jahr bei Unterteilung in  $n$  Zeiteinheiten

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Es stellt sich ganz natürlich die Frage nach einer kontinuierlichen Verzinsung, also nach dem Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ .

**Satz 2.4.12** (natürliches Wachstum). *Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

*Beweis.* Mit der binomischen Formel, siehe Satz 1.6.10, folgt

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}}_{=: c(n,k)} \frac{x^k}{k!}.$$

Es gilt  $c(n, k) \rightarrow 1$  mit  $n \rightarrow \infty$ , also folgt für festes  $m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^m c(n, k) \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} = \exp_m(x).$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $m \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$m+1 \geq 2|x| \quad \text{und} \quad \frac{4|x|^{(m+1)}}{(m+1)!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für  $n \geq m+1$  folgt wegen  $0 < c(n, k) < 1$  mit (2.3) und (2.5)

$$\begin{aligned} |a_n(x) - \exp(x)| &= \left| \sum_{k=0}^m c(n, k) \frac{x^k}{k!} - \exp_m(x) + \sum_{k=m+1}^n c(n, k) \frac{x^k}{k!} + \exp_m(x) - \exp(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^m c(n, k) \frac{x^k}{k!} - \exp_m(x) \right| + \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{2|x|^{m+1}}{(m+1)!} \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^m c(n, k) \frac{x^k}{k!} - \exp_m(x) \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Jetzt wähle  $n$  so groß, dass der erste Term kleiner  $\varepsilon/2$  ist. □

**Definition 2.4.13** (Eulersche Zahl). Die Eulersche Zahl ist

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828 \dots$$

Jährliche Verzinsung von 1 Euro mit Zinssatz Eins ergibt nach einem Jahr 2 Euro, kontinuierliche Verzinsung dagegen  $e \approx 2,71828 \dots$  Euro. Betrachten wir allgemeiner eine Laufzeit von  $x$  Jahren, wieder mit Zinssatz Eins, so ergibt sich bei kontinuierlicher Verzinsung gerade der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

Legt man dieses Geld weiter für  $y$  Jahre an, wieder mit Zinssatz Eins, so ist der Kontostand dann  $\exp(x)\exp(y)$ . Andererseits hätte man das Geld genauso gut direkt für  $x + y$  Jahre anlegen können, dann bekommt man  $\exp(x + y)$ . Es sollte also gelten

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktionalgleichung brauchen wir auch im Komplexen, und verallgemeinern dazu die Definition der Exponentialfunktion aus Satz 2.4.11 wie folgt:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Die Konvergenz (mit gleichen Abschätzungen) folgt wie im reellen Fall, Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen ist nichts anderes als Konvergenz sowohl des Real- als auch des Imaginärteils.

**Satz 2.4.14** (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Es gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

*Beweis.* Die Binomische Formel, siehe Satz 1.6.10, ergibt

$$\frac{(z + w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{k+\ell=n} \frac{z^k w^\ell}{k! \ell!}.$$

Wir schätzen nun wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |\exp_{2n}(z)\exp_{2n}(w) - \exp_{2n}(z+w)| &= \left| \sum_{k,\ell \leq 2n} \frac{z^k w^\ell}{k! \ell!} - \sum_{k+\ell \leq 2n} \frac{z^k w^\ell}{k! \ell!} \right| \\ &\leq \sum_{k,\ell \leq 2n, \max(k,\ell) > n} \frac{|z|^k |w|^\ell}{k! \ell!} \\ &= \exp_{2n}(|z|)\exp_{2n}(|w|) - \exp_n(|z|)\exp_n(|w|). \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null nach Satz 2.4.11, und die Behauptung folgt.  $\square$

Wir stellen jetzt den Anschluss her an die Exponentialfunktion aus der Schule, und zeigen

$$\exp(r) = e^r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}. \quad (2.7)$$

Durch Induktion erhalten wir sofort  $\exp(nx) = \exp(x)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt  $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$ . Daraus folgt für  $k \in \mathbb{Z}^-$

$$\exp(kx) = \exp(-(-kx)) = \frac{1}{\exp(-kx)} = \frac{1}{\exp(x)^{-k}} = \exp(x)^k.$$

Schließlich gilt für  $r = p/q$  mit  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$

$$(\exp(rx))^q = \exp(q \cdot rx) = \exp(px) = \exp(x)^p,$$

also

$$\exp(rx) = \exp(x)^{\frac{p}{q}} = \exp(x)^r \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Q}.$$

Mit  $x = 1$  folgt insbesondere  $\exp(r) = e^r$  für  $r \in \mathbb{Q}$ . Für rationale  $x$  kann  $\exp(x)$  als Potenz definiert werden. Für irrationale  $x$  ist das nicht möglich. Die Notation  $e^x$  statt  $\exp(x)$  ist aber durchaus üblich, einfach weil sie sehr suggestiv ist.

Hier eine weitere Anwendung des Konvergenzkriteriums der Monotonie und Beschränktheit, Satz 2.4.10.

*Beispiel* (Dezimalbrüche). Jede Dezimalbruchfolge  $a_n = k_0, k_1 k_2 \dots k_n$  mit  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $k_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$  konvergiert gegen eine gewisse reelle Zahl. Denn die Folge  $a_n$  ist monoton wachsend und es gilt (geometrische Reihe)

$$a_n \leq k_0 + \sum_{j=1}^n 9 \cdot 10^{-j} \leq k_0 + 1,$$

das heißt  $a_n$  ist nach oben beschränkt. Für eine gegebene Zahl  $a \in \mathbb{R}$  kann man die Ziffern induktiv bestimmen durch  $k_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$  und

$$k_n = \max\{k \in \mathbb{Z} : a_{n-1} + k \cdot 10^{-n} \leq a\}.$$

Es kann vorkommen, dass zwei Dezimalbrüche dieselbe reelle Zahl liefern – wann?

Wie gesagt ist der Vorteil des Kriteriums der Monotonie und Beschränktheit, dass die Konvergenz ohne a priori Kenntnis des Grenzwerts gezeigt werden kann. Das nachfolgende Kriterium von Augustin Louis Cauchy (1789–1857) ist von derselben Form, braucht aber nicht die Monotonie. Die Idee besteht darin, die Glieder der Folge nicht mit dem unbekanntem Grenzwert, sondern *untereinander* zu vergleichen. Aus Zeitgründen verzichten wir auf den Beweis.

**Satz 2.4.15** (Konvergenz von Cauchyfolgen). *Sei  $a_n$  eine Cauchyfolge, das heißt :*

$$\text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{R}, \text{ so dass } |a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m > N.$$

*Dann gibt es ein  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$  mit  $n \rightarrow \infty$ .*

Beim Nachweis dieser Eigenschaft reicht es aus, die Zahlen  $n, m > 0$  mit  $n < m$  zu betrachten, denn die Definition ist symmetrisch in  $n$  und  $m$  und für  $n = m$  ist nichts zu tun.

## 2.5 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wir übertragen jetzt das Konzept des Grenzwerts auf Funktionen.

**Definition 2.5.1** (Grenzwert für Funktionen). Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subset \mathbb{R}$ , konvergiert für  $x \rightarrow x_0$  gegen  $a \in \mathbb{R}$ , falls gilt:

$$f(x_n) \rightarrow a \quad \text{für jede Folge } x_n \in D \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ in } \mathbb{R}.$$

Hier sind einige Bemerkungen angesagt:

- (1) Für die Existenz und den Wert des Grenzwerts ist es egal, ob  $f(x)$  im Punkt  $x_0$  definiert ist bzw. welchen Funktionswert die Funktion dort hat.
- (2) Der Begriff ist nur sinnvoll, wenn es überhaupt eine solche Folge  $x_n$  gibt.
- (3) Beim rechtsseitigen (linksseitigen) Grenzwert betrachtet man nur Folgen  $x_n \rightarrow x_0$  mit  $x_n > 0$  (bzw.  $x_n < 0$ ). *Notation:*  $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ .
- (4) Die Definition gilt sinngemäß für die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

*Beispiel.* Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , hat in  $x_0 = 0$  keinen rechtsseitigen Grenzwert. Denn es gilt für  $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \sin n\pi = 0 \quad \text{aber} \quad f\left(\frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right) = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1.$$

Für die Funktion  $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ist dagegen  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , denn es gilt

$$|g(x_n)| \leq |x_n| \rightarrow 0 \quad \text{für } x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0.$$

*Beispiel.* Die Signumfunktion

$$\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

hat die einseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \searrow 0} \text{sign}(x) = +1$  und  $\lim_{x \nearrow 0} \text{sign}(x) = -1$ , während der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}(x)$  nicht existiert.

Folgende Regeln ergeben sich aus den Aussagen für Folgen, siehe Satz 2.4.6 und Satz 2.4.7.

**Satz 2.5.2** (Rechenregeln für Grenzwerte). *Es gelten folgende Aussagen:*

(1) *Aus  $f(x) \rightarrow a$ ,  $g(x) \rightarrow b$  für  $x \rightarrow x_0$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , folgt*

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta g(x) &\rightarrow \alpha a + \beta b \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \\ f(x)g(x) &\rightarrow ab, \\ f(x)/g(x) &\rightarrow a/b, \quad \text{falls } b \neq 0. \end{aligned}$$

(2) *Sei  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  nahe bei  $x_0$ . Falls  $f(x), h(x) \rightarrow a$  mit  $x \rightarrow x_0$ , so folgt auch  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ .*

**Definition 2.5.3** (Stetigkeit). Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $x_0 \in D$ , falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Unsere Definition beruft sich auf den Konvergenzbegriff für Folgen. Viele Bücher verwenden eine Formulierung, die nicht auf Folgen zurückgreift, die sogenannte  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit: *für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass gilt:*

$$x \in D, |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die beiden Formulierungen sind aber äquivalent, und unsere Definition der Konvergenz für Folgen war ja nach demselben Muster gebaut. Die Regeln für Grenzwerte implizieren direkt folgende Regeln zur Bildung stetiger Funktionen.

**Satz 2.5.4** (Stetigkeitsregeln). *Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in D$ . Dann gilt:*

- (1) *Für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $\alpha f + \beta g$  stetig in  $x_0$ .*
- (2) *Die Funktion  $fg$  ist stetig in  $x_0$ .*

(3) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so ist die Funktion  $f/g : D \cap U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $\delta > 0$  hinreichend klein definiert und stetig in  $x_0$ .

In (3) muss man auf eine Umgebung  $U_\delta(x_0)$  gehen, da sonst  $g(x)$  Nullstellen haben kann.

*Beispiel.* Konstante Funktionen  $f(x) = c$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn für sie ist

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) = c = f(x_0).$$

*Beispiel.* Die Funktion  $f(x) = x$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn es gilt

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) = x_n \rightarrow x_0 = f(x_0).$$

*Beispiel.* Betrachte für Polynome  $p(x)$  und  $q(x)$  die rationale Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus N_q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{wobei } N_q = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

Mit den vorangehenden Beispielen und Satz 2.5.4 folgt, dass  $f(x)$  stetig ist auf  $\mathbb{R} \setminus N_q$ . Sei nun  $\lambda \in N_q$   $m$ -fache Nullstelle von  $q(x)$  und  $k$ -fache Nullstelle von  $p(x)$  (mit  $k = 0$  im Fall  $p(x) \neq 0$ ). Dann gibt es Polynome  $p_1(x)$  und  $q_1(x)$  mit  $p_1(\lambda), q_1(\lambda) \neq 0$ , so dass gilt:

$$f(x) = (x - \lambda)^{k-m} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} =: f_1(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus N_q.$$

Im Fall  $k \geq m$  ist  $f_1 : \mathbb{R} \setminus N_{q_1} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig im Punkt  $\lambda$  mit Funktionswert

$$f_1(\lambda) := \begin{cases} \frac{p_1(\lambda)}{q_1(\lambda)} & \text{falls } k = m, \\ 0 & \text{falls } k > m. \end{cases}$$

Damit ist  $f_1$  stetige Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus N_q \cup \{\lambda\}$ . Dies erklärt die Bezeichnung *hebbare Singularität* aus Kapitel 2.2. Im Fall  $k < m$  kann es keine stetige Fortsetzung geben, da  $f(x_n) \rightarrow \pm\infty$  für jede Folge  $x_n \rightarrow x_0$ .

*Beispiel.* Die charakteristische Funktion von  $\mathbb{Q}$  (oder Dirichlet-Funktion)

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nirgends stetig, denn  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sind beide dicht in  $\mathbb{R}$  (vgl. Kapitel 1.2). Ist zum Beispiel  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , so gibt es eine Folge  $x_n \in \mathbb{Q}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1 \neq 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)$ .

**Satz 2.5.5** (Verkettung stetiger Funktionen). *Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}$ . Ist  $f$  stetig in  $x_0$  und  $g$  stetig in  $y_0 = f(x_0)$ , so ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .*

*Beweis.* Ist  $x_n \in D$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , so folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  aus der Stetigkeit von  $f$  in  $x_0$ , und weiter  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$  wegen der Stetigkeit von  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$ .  $\square$

*Beispiel.* Die Betragsfunktion ist stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn es gilt

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \Rightarrow \quad \left| |x_n| - |x_0| \right| \leq |x_n - x_0| \rightarrow 0.$$

Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so auch  $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Satz 2.5.6** (Intervallschachtelungsprinzip). Seien  $I_n = [a_n, b_n]$  Intervalle mit  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$  und  $b_n - a_n \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$ . Dann gibt es genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und zwar gilt  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**Satz 2.5.7** (Zwischenwertsatz). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es zu jedem  $y_0$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .

*Bemerkung.* Die Gleichung  $f(x) = y_0$  kann mehrere Lösungen in  $[a, b]$  besitzen, das heißt  $x_0$  ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $y_0 = 0$ , sonst betrachte  $f(x) - y_0$ . Setze  $[a_0, b_0] = [a, b]$ , und konstruiere eine Intervallschachtelung  $[a_n, b_n]$  so dass  $f(a_n)$  und  $f(b_n)$  nicht dasselbe Vorzeichen haben, also  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ . Nun hat  $f(\frac{a_n+b_n}{2})$  höchstens mit einer der Zahlen  $f(a_n)$  und  $f(b_n)$  gleiches Vorzeichen, also können wir als Folgeintervall eines der Intervalle  $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$  oder  $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$  wählen. Der durch die Intervallschachtelung definierte Punkt  $x \in [a, b]$  ist eine Nullstelle, denn  $f(x)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ . □

**Satz 2.5.8** (Monotonie und Umkehrfunktion). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend und stetig. Dann gilt:

(1)  $f(I) = [f(a), f(b)]$ .

(2) Die Umkehrfunktion  $g : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend und stetig.

*Beweis.* Aus der Monotonie folgt  $f(I) \subset [f(a), f(b)]$ , Gleichheit liefert der Zwischenwertsatz. Wäre  $g$  nicht streng monoton wachsend, so gibt es  $y_1, y_2 \in f(I)$  mit  $y_1 < y_2$ , aber  $g(y_2) \leq g(y_1)$ . Aus der Monotonie von  $f$  folgt aber

$$y_2 = f(g(y_2)) \leq f(g(y_1)) = y_1, \quad \text{Widerspruch.}$$

Wir zeigen die linksseitige Stetigkeit von  $g$  in einem Punkt  $y_0 \in (f(a), f(b))$ , also  $y_0 = f(x_0)$  mit  $x_0 \in (a, b)$ . Da  $f$  streng monoton ist, gilt  $f(x_0 - \varepsilon) < y_0$  für alle  $\varepsilon > 0$  mit  $x_0 - \varepsilon \geq a$ . Für jede Folge  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $y_n < y_0$ , gibt es dann ein  $N \in \mathbb{R}$  mit

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_n < y_0 \quad \text{für } n > N.$$

Da  $g$  streng monoton, folgt weiter

$$g(y_0) - \varepsilon = x_0 - \varepsilon < g(y_n) < g(y_0) \quad \text{für } n > N.$$

Also gilt  $\lim_{y \nearrow y_0} g(y) = g(y_0)$ . Die rechtsseitige Stetigkeit folgt analog. □

Der Satz gilt sinngemäß auch auf offenen oder halboffenen Intervallen.

*Beispiel* (Definition des natürlichen Logarithmus).  $\exp : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty. \quad (2.8)$$

Die Umkehrfunktion  $\ln : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  heißt (natürlicher) Logarithmus. Die Funktion ist ebenfalls streng monoton wachsend, stetig und bijektiv, und es gilt

$$\lim_{y \searrow 0} \ln(y) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(y) = \infty. \quad (2.9)$$

Weiter ist  $\ln(1) = 0$  und  $\ln(e) = 1$ , und  $\ln$  erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(y_1 y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2) \quad \text{für alle } y_1, y_2 > 0. \quad (2.10)$$

**Definition 2.5.9** (Potenz mit reellen Exponenten). Für  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

## Kapitel 3

# Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

### 3.1 Die Ableitung: Definition und Regeln

Im diesem Abschnitt betrachten wir reellwertige Funktionen einer Variablen, die auf einem offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert sind.

**Definition 3.1.1** (Ableitung). Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  hat im Punkt  $x_0 \in I$  die Ableitung  $a \in \mathbb{R}$  (Notation:  $f'(x_0) = a$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0) = a$ ), falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a. \quad (3.1)$$

Wir nennen  $f$  differenzierbar in  $x_0$ , falls es ein  $a \in \mathbb{R}^n$  mit (3.1) gibt, falls also der in (3.1) betrachtete Grenzwert existiert.

Eine alternative Formulierung ergibt sich durch die Substitution  $x = x_0 + h$ :

$$f'(x_0) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Leibniz interessierte sich für die Definition der Ableitung im Zusammenhang mit dem Problem, die Tangente an eine ebene Kurve in einem gegebenen Punkt zu definieren. Nehmen wir dazu an, dass die Kurve als Graph einer Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, und dass die Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  gesucht ist. Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x_0, x \in I, x \neq x_0)$$

ist geometrisch die Steigung der Sekante durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x, f(x))$ . Die Existenz der Ableitung bedeutet, dass die Sekantensteigungen für  $x \rightarrow x_0$  gegen den Wert  $f'(x_0)$  konvergieren. Die Tangente wird nun definiert als die Gerade, die durch den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  geht und die Steigung  $f'(x_0)$  hat. Daraus ergibt sich ihre Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Newton entwickelte den Differentialkalkül (Englisch: Calculus) unter anderem um die Kepler'schen Gesetze für die Planetenbewegung zu begründen, genauer konnte er diese Gesetze alle

aus dem Gravitationsgesetz ableiten. Dazu wird die Bewegung eines Planeten durch seinen Ortsvektor

$$\vec{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben, also durch dessen Koordinaten zur Zeit  $t \in I$  bezüglich eines Euklidischen Koordinatensystems. Erstes Ziel ist dann die Definition der Momentangeschwindigkeit als Vektor in  $\mathbb{R}^3$ . Die vektorielle Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem Zeitintervall  $[t_0, t]$  ist der Quotient von Weg und Zeit, also gleich

$$\frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Momentangeschwindigkeit  $\vec{v}(t_0)$  zum Zeitpunkt  $t = t_0$  ist deshalb als vektorielle Ableitung zu definieren, wobei Newton einen Punkt statt eines Strichs benutzt hat:

$$\vec{v}(t_0) = \dot{\vec{f}}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**Definition 3.1.2** (Ableitungsfunktion). Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar, falls  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  differenzierbar ist. Die hierdurch gegebene Funktion

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

heißt Ableitungsfunktion oder schlicht Ableitung von  $f$ .

*Beispiel.* Für eine konstante Funktion  $f(x) = c$  gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \text{ bzw. } f' = 0.$$

*Beispiel.* Für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ , gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{für alle } x \neq x_0,$$

also folgt  $f'(x_0) = 1$  bzw.  $f' = 1$ .

*Beispiel.* Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ , ist nicht differenzierbar in  $x_0 = 0$ :

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Die rechts- und linksseitige Ableitung existieren in  $x_0 = 0$ , sie sind aber verschieden.

*Beispiel.* Für die Funktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\exp' = \exp$ . Wir verwenden dazu die Abschätzung (2.5) im Fall  $m = 1$ :

$$|\exp(x) - (1 + x)| \leq |x|^2 \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Es folgt

$$\left| \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} - 1 \right| = \frac{|\exp(x) - (1 + x)|}{|x|} \leq |x| \rightarrow 0 \quad \text{mit } x \rightarrow 0.$$

Also ist  $\exp'(0) = 1$ . Für  $x \neq 0$  schließen wir weiter mit der Funktionalgleichung

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} \rightarrow \exp(x) \quad \text{mit } h \rightarrow 0.$$

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit (aber nicht umgekehrt):

**Satz 3.1.3.** Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ , so ist  $f$  auch stetig in  $x_0$ .

*Beweis.* Es gilt mit  $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \rightarrow f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

□

**Satz 3.1.4** (Differentiationsregeln). Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Dann sind auch die Funktionen  $\alpha f + \beta g$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ),  $fg$  und  $f/g$  (im Fall  $g(x_0) \neq 0$ ) in  $x_0$  differenzierbar mit folgenden Ableitungen:

(1) *Linearität:*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(2) *Produktregel:*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) *Quotientenregel:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

*Beweis.* Wir müssen jeweils für  $x \neq x_0$  die Differenzenquotienten bilden und zeigen, dass diese mit  $x \rightarrow x_0$  gegen das gewünschte konvergieren. Für (1) haben wir

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} &= \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \end{aligned}$$

Die Produktregel folgt durch „Mischen der Terme“:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \end{aligned}$$

wobei die Stetigkeit von  $g$  in  $x_0$  benutzt wurde (Satz 3.1.3). Für die Quotientenregel reicht es, die Funktion  $1/g$  zu betrachten, also  $f \equiv 1$ .

$$\frac{1}{x - x_0} \left( \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right) = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

□

*Beispiel.* Für  $f_n(x) = x^n$  folgt aus Beispiel 3.1, also  $f'_1 = 1$ , und der Produktregel

$$f'_n(x) = (f_1 f_{n-1})'(x) = f'_1(x) f_{n-1}(x) + f_1(x) f'_{n-1}(x) = x^{n-1} + x f'_{n-1}(x),$$

und damit per Induktion  $f'_n(x) = nx^{n-1}$ . Allgemeiner ergibt sich mit Satz 3.1.4(1) für Polynome  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  die Formel

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j.$$

*Beispiel.* Für  $f(x) = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gilt  $f'(x) = -nx^{-n-1}$  nach der Quotientenregel:

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}.$$

**Satz 3.1.5** (Kettenregel). *Seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(I) \subset J$ . Ist  $f$  in  $x_0$  sowie  $g$  in  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar, so ist auch  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

*Beweis.* Wir betrachten für  $x \neq x_0$  den Differenzenquotienten:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Hier haben wir benutzt, dass  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  mit  $x \rightarrow x_0$  nach Satz 3.1.3. Ein technisches Problem gibt es, wenn  $f(x) = f(x_0)$  für  $x$  nahe  $x_0$ , aber das wollen wir hier nicht behandeln.  $\square$

**Satz 3.1.6** (Ableitung der Umkehrfunktion). *Die Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sei streng monoton und stetig. Ist  $f'(x_0) \neq 0$ , so ist die Umkehrfunktion  $g = f^{-1}$  differenzierbar in  $y_0 = f(x_0)$  mit Ableitung*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

*Beweis.*  $g$  existiert und ist stetig nach Satz 2.5.8. Wir berechnen für  $y \rightarrow y_0$ , also  $g(y) \rightarrow g(y_0)$ ,

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\square$

Die Formel für die Ableitung folgt auch aus der Kettenregel:

$$f(g(y)) = y \quad \Rightarrow \quad f'(g(y))g'(y) = 1.$$

Wir sehen: damit die Umkehrfunktion im Punkt  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar ist, muss  $f'(x_0) \neq 0$  gelten. Zum Beispiel kann die Umkehrfunktion von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , im Nullpunkt nicht differenzierbar sein.

Die beiden vorangegangenen Regeln sind in der von Leibniz eingeführten Notation besonders suggestiv. Leibniz schreibt Funktionen in der Form  $y = y(x)$  und bezeichnet die Ableitung mit dem Symbol  $\frac{dy}{dx}$ , das auch als *Differentialquotient* bezeichnet wird. Formal ergeben sich die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion dann aus der Bruchrechnung:

$$\begin{aligned} y = y(x), z = z(y) &\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}, \\ y = y(x), x = x(y) &\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Bei der Anwendung dieser saloppen Notation ist jedoch darauf zu achten, an welchen Stellen die jeweiligen Funktionen auszuwerten sind.

*Beispiel.* Die Funktion  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar mit Ableitung

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}.$$

Dies folgt aus Beispiel 3.1 und Satz 3.1.6, genauer ist

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$

*Beispiel.* Die Potenzfunktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist Verkettung der Funktionen  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \alpha \ln x$ . Mit der Kettenregel berechnen wir

$$f'(x) = \exp(\alpha \ln x) \frac{\alpha}{x} = \alpha \exp(\alpha \ln x) \exp(-\ln x) = \alpha \exp((\alpha - 1) \ln x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

*Beispiel.* Die Exponentialfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$  mit  $a > 0$ , ist Verkettung von  $\exp$  und  $h(x) = (\ln a)x$ , deshalb folgt

$$f'(x) = \exp((\ln a)x) \ln a = (\ln a)a^x.$$

Wir wollen nun die Ableitungen der Funktionen  $\cos x$  und  $\sin x$  in Angriff nehmen.

*Beispiel* (Ableitung von Kosinus/Sinus). Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos'(t) = -\sin t, \quad \sin'(t) = \cos t \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} e^{it} = i e^{it}.$$

Wir berechnen dazu erst die Ableitungen im Punkt  $t = 0$ . Für  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  liegt  $e^{it} = (\cos t, \sin t)$  auf dem rechten oberen Viertelkreis. Da die gerade Verbindung der Punkte  $(1, 0)$  und  $(\cos t, \sin t)$  kürzer ist als der Kreisbogen, gilt

$$\sin t \leq \sqrt{(\sin t)^2 + (1 - \cos t)^2} = |e^{it} - 1| \leq t. \quad (3.2)$$

Mit  $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$  folgt aus (3.2)

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2} \leq 2 \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{2}. \quad (3.3)$$

Mit Satz 2.5.2(2) folgt bereits die Ableitung des Kosinus: es ist  $\cos 0 = 1$  und

$$0 \geq \frac{\cos t - 1}{t - 0} \geq -\frac{t}{2} \rightarrow 0 \quad \text{mit } t \searrow 0.$$

Für den Sinus brauchen wir ein weiteres geometrisches Argument: der Schnittpunkt des Strahls  $\lambda(\cos t, \sin t)$  mit der Geraden  $x = 1$  ist  $p = (1, \tan t)$ . Das zu  $t$  gehörige Kreis-segment ist dann ganz enthalten im Dreieck mit Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(1, \tan t)$ . Flächenvergleich ergibt

$$\frac{t}{2\pi} \cdot \pi \leq \frac{1}{2} \tan t \quad \text{bzw.} \quad t \leq \tan t. \quad (3.4)$$

Nun folgt

$$1 \geq \frac{\sin t}{t} = \frac{\tan t}{t} \cos t \geq \cos t \rightarrow 1 \quad \text{mit } t \searrow 0.$$

Der Grenzwert  $\lim_{t \searrow 0} \cos t = \cos 0 = 1$  folgt dabei aus Satz 3.1.3. Die Grenzwerte für  $t \nearrow 0$  folgen mit  $\sin(-t) = -\sin t$  und  $\cos(-t) = \cos t$ . Insgesamt haben wir  $\cos'(0) = 0$  und  $\sin'(0) = 1$  bewiesen.

Für beliebige  $t$  verwenden wir nun die Additionstheoreme: es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\cos(t+h) - \cos t}{h} &= \cos t \frac{\cos h - 1}{h} - \sin t \frac{\sin h}{h} \rightarrow -\sin t \\ \frac{\sin(t+h) - \sin t}{h} &= \sin t \frac{\cos h - 1}{h} + \cos t \frac{\sin h}{h} \rightarrow \cos t. \end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$\frac{d}{dt} e^{it} = \frac{d}{dt} (\cos t + i \sin t) = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = i e^{it}.$$

Der Vorteil des gegebenen Arguments liegt in der Anschaulichkeit. Allerdings liegt darin auch ein Nachteil: unsere Definition von  $\cos t$  und  $\sin t$  stützt sich immer noch auf die Anschauung, da wir die Bogenlänge nicht definiert haben. Dies macht es schwierig, mit den Funktionen effektiv umzugehen. Die Differentialgleichungen bedeuten einen großen Gewinn, weil wir sie einsetzen können, um die trigonometrischen Funktionen weiter zu studieren.

*Beispiel.* Die Differenzierbarkeit der Arcusfunktionen auf dem offenen Intervall  $(-1, 1)$  folgt aus Beispiel 3.1 und Satz 3.1.6. Beachtet man  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  sowie  $\arccos x \in (0, \pi)$  bzw.  $\arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

## 3.2 Mittelwertsatz und Anwendungen

Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $x_0 \in I$  ein Minimum (bzw. ein Maximum), wenn gilt:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in I \quad (\text{bzw. } f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in I).$$

Man nennt dann  $x_0$  eine Minimalstelle bzw. Maximalstelle. Der folgende Satz garantiert die Existenz solcher Stellen unter geeigneten Voraussetzungen.

**Satz 3.2.1** (Extremalstellen). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es  $x_0, x_1 \in I$  mit

$$f(x_0) = \inf_{x \in I} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_1) = \sup_{x \in I} f(x).$$

Insbesondere ist  $f$  beschränkt.

*Beweis.* Für  $I = I' \cup I''$  sieht man leicht  $\inf_I f = \min(\inf_{I'} f, \inf_{I''} f)$ . Setze  $\lambda = \inf_I f \in [-\infty, \infty)$  und bestimme durch fortgesetzte Halbierung  $I_k = [a_k, b_k]$  mit  $I_0 = I$  und

$$\inf_{I_k} f = \lambda \quad \text{für } k = 0, 1, \dots$$

Sei  $x \in I_k$  für alle  $k$ . Wäre  $f(x) > \lambda$ , so gibt es ein  $\lambda' > \lambda$  und ein  $\delta > 0$  mit

$$f(y) \geq \lambda' \quad \text{für alle } y \in (x - \delta, x + \delta) \cap I.$$

Dies folgt aus der Stetigkeit von  $f$ . Da  $I_k \subset (x - \delta, x + \delta) \cap I$  für  $k$  hinreichend groß, folgt  $\inf_{I_k} f \geq \lambda' > \lambda$ , ein Widerspruch. Also gilt  $f(x) = \lambda$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Satz 3.2.2** (notwendige Bedingung für Extrema I). *Die Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  habe in  $x_0 \in (a, b)$  ein Extremum. Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so gilt  $f'(x_0) = 0$ .*

*Beweis.* Im Fall eines Minimums in  $x_0$  haben wir

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x > x_0, \\ \leq 0 & \text{für } x < x_0. \end{cases}$$

Mit  $x \searrow x_0$  folgt  $f'(x_0) \geq 0$ , mit  $x \nearrow x_0$  folgt  $f'(x_0) \leq 0$ .  $\square$

Die Funktion  $f(x) = x^3$  erfüllt  $f'(0) = 0$ , aber in  $x = 0$  liegt kein Extremum vor. Die Bedingung  $f'(x_0) = 0$  ist notwendig für eine Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion, aber sie ist nicht hinreichend.

**Satz 3.2.3** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung zuerst im Fall  $f(a) = f(b) = 0$  (Satz von Rolle). Wir brauchen dann ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ . Nach Satz 3.2.1 gibt es  $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$  mit mit

$$f(\xi_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(\xi_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Ist  $\xi_1 \in (a, b)$ , so folgt  $f'(\xi_1) = 0$  nach Satz 3.2.2 und wir können  $\xi = \xi_1$  wählen. Analog, wenn  $\xi_2 \in (a, b)$ . Im verbleibenden Fall  $\xi_1, \xi_2 \in \{a, b\}$  folgt  $\inf f = \sup f = 0$  bzw.  $f(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , und damit auch  $f'(x) = 0$  für alle  $x$ . Seien nun  $f(a), f(b)$  beliebig. Definiere  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch Abziehen der Sekante:

$$h(x) = f(x) - \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Es gilt  $h(a) = h(b) = 0$ . Also existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

**Folgerung 3.2.4** (Monotoniekriterium). *Sei  $f$  differenzierbar auf  $(a, b)$ , stetig auf  $[a, b]$ . Dann gelten folgende Aussagen:*

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ ist wachsend auf } [a, b] \\ f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ ist fallend auf } [a, b] \\ f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ ist konstant.} \end{aligned}$$

*Bei strikter Ungleichung folgt strenge Monotonie auf  $[a, b]$ .*

*Beweis.* Sei  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ . Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein  $\xi \in (x_1, x_2)$ , so dass gilt:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \begin{cases} \geq 0 & \text{wenn } f'(\xi) \geq 0 \\ > 0 & \text{wenn } f'(\xi) > 0 \\ \leq 0 & \text{wenn } f'(\xi) \leq 0 \\ < 0 & \text{wenn } f'(\xi) < 0 \\ = 0 & \text{wenn } f'(\xi) = 0 \end{cases}.$$

□

Wir kommen jetzt zu höheren Ableitungen.

**Definition 3.2.5.** Die  $k$ -te Ableitung von  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  ist induktiv definiert durch

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0).$$

Damit  $f^{(k)}(x_0)$  definiert ist, müssen also die Ableitungen bis Ordnung  $k-1$  in einer Umgebung von  $x_0$  definiert sein, und  $f^{(k-1)}$  muss in  $x_0$  differenzierbar sein.

Natürlich schreiben wir  $f'$  und  $f''$  statt  $f^{(1)}$  bzw.  $f^{(2)}$ . Mit der zweiten Ableitung gewinnen wir genauere Informationen über lokale Extrema.

**Satz 3.2.6** (notwendige Bedingung für Extrema II). *Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, mit einem Minimum in  $x_0$ . Falls  $f''(x_0)$  existiert, so gilt*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \geq 0.$$

Für Maxima gilt analog  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \leq 0$ .

*Beweis.*  $f'(x_0) = 0$  wurde in Satz 3.2.2 bewiesen. Es folgt

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Wäre  $f''(x_0) < 0$ , so wäre  $f'(x) > 0$  links von  $x_0$  und  $f'(x) < 0$  rechts von  $x_0$ , jeweils nahe bei  $x_0$ . Nach Folgerung 3.2.4 ist  $f$  dann streng monoton wachsend links von  $x_0$  und streng monoton fallend rechts von  $x_0$ , hat also in  $x_0$  ein striktes, lokales Maximum im Widerspruch zur Annahme. □

Die Funktion  $f(x) = x^4$  zeigt, dass in einem Minimum  $f''(x_0) = 0$  gelten kann. Wir haben nun notwendige Bedingungen für Extrema, aber was ist mit hinreichenden Bedingungen? Offensichtlich kann man aus Eigenschaften im Punkt  $x_0$  höchstens lokale Konsequenzen ziehen, unser Interesse gilt aber globalen Extremaleigenschaften. Dafür spielt folgender Begriff eine Rolle.

**Definition 3.2.7.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine zweimal differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex (bzw. konkav), wenn  $f'' \geq 0$  auf  $I$  (bzw.  $f'' \leq 0$  auf  $I$ ).

Fährt man auf dem Graph von  $f$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse, so bedeutet Konvexität eine Linkskurve, Konkavität eine Rechtskurve.

**Satz 3.2.8** (Konvexität). *Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar, so sind äquivalent:*

(1)  $f$  ist konvex.

(2) Der Graph von  $f$  liegt oberhalb jeder Tangente:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{für alle } x_0, x \in (a, b).$$

*Beweis.* Für  $g(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$  gilt  $g''(x) = f''(x)$ . Sei nun  $f$  und damit  $g$  konvex. Dann ist  $g'$  monoton wachsend nach Folgerung 3.2.4. Wegen  $g'(x_0) = 0$  folgt

$$g'(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x < x_0 \\ \geq 0 & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

Wieder mit Folgerung 3.2.4 ist  $g$  fallend für  $x < x_0$  und wachsend für  $x > x_0$ . Da  $g(x_0) = 0$ , folgt  $g(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , das heißt es gilt (2). Umgekehrt folgt aus (2), dass  $g$  ein Minimum bei  $x_0$  hat, und Satz 3.2.6 liefert

$$0 \leq g''(x_0) = f''(x_0).$$

Da  $x_0 \in (a, b)$  beliebig, folgt  $f$  konvex. □

**Definition 3.2.9.** Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt ein lokales Minimum im Punkt  $x_0 \in I$ , falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

Das Minimum heißt striktes lokales Minimum, falls die Ungleichung strikt ist. Die analoge Definition gilt für lokale Maxima.

**Folgerung 3.2.10.** Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar,  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x) \geq 0$  für  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ . Dann besitzt  $f$  im Punkt  $x_0$  ein lokales Minimum (strikt im Fall  $f'' > 0$ ).

**Definition 3.2.11.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Wir bezeichnen mit  $C^k(I)$  die Menge der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , das heißt

$$C^k(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} : f^{(i)}: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sind definiert und stetig für } i = 0, 1, \dots, k\}.$$

Weiter sei  $C^\infty(I)$  die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, also

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(I).$$

Der Umgang mit  $C^\infty$ -Funktionen ist besonders angenehm, weil die Klasse im Gegensatz zu  $C^k(I)$  unter der Bildung von Ableitungen abgeschlossen ist. Es ist klar, dass Polynome unendlich oft differenzierbar sind, ebenso die Exponentialfunktion sowie Kosinus und Sinus. Man kann auch eine Funktion  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  basteln, die für  $x \in (-1, 1)$  positiv ist und sonst Null.

*Bemerkung.* Sei  $f \in C^2(I)$ . Es gelte  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$  für ein  $x_0 \in I$ . Mit Folgerung 3.2.10 und der Stetigkeit der zweiten Ableitung folgt, dass  $f$  im Punkt  $x_0$  ein striktes lokales Minimum besitzt.

# Kapitel 4

## Integralrechnung

### 4.1 Das Riemannsches Integral

Das Integral einer nichtnegativen Funktion  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist anschaulich der Flächeninhalt des Gebiets  $\{(x, y) : x \in I, 0 < y < f(x)\}$ . Falls  $f$  das Vorzeichen wechselt, sind die Gebiete unterhalb der  $x$ -Achse negativ zu zählen. Allerdings haben wir den Flächeninhalt von Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  noch gar nicht definiert. Deshalb approximieren wir das Integral durch Rechtecksummen.

Eine Zerlegung  $Z$  eines Intervalls  $[a, b]$  ist gegeben durch Punkte  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = b$ . Wir setzen  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$  und  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  für  $k = 1, \dots, N$ . Die Feinheit von  $Z$  ist

$$\Delta(Z) = \max_{1 \leq k \leq N} \Delta x_k. \quad (4.1)$$

**Definition 4.1.1** (Riemannsche Summe). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung  $Z$  ist

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \Delta x_k \in \mathbb{R}.$$

Die Punkte  $\xi_k \in I_k$  heißen Stützstellen.

Die Riemannsche Summe ist ein Näherungswert für das Integral. Eine konkrete Wahl der Zerlegung und der Stützstellen, zum Beispiel die äquidistante Zerlegung mit Intervallmittelpunkten als Stützstellen, führt auf ein numerisches Verfahren zur Approximation des Integrals. Wir wollen aber beliebige Zerlegungen zulassen.

**Satz 4.1.2** (Integral stetiger Funktionen). Sei  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es ein  $S \in \mathbb{R}$ , das Integral von  $f$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f) = S$  für jede Folge von Zerlegungen  $Z_n$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f) = S =: \int_a^b f(x) dx \quad \text{falls } \Delta(Z_n) \rightarrow 0.$$

Die Integrationsvariable ist analog zu einem Summationsindex, sie kann beliebig umbenannt werden. In Anwendungen ist es aber manchmal hilfreich, den Namen richtig zu wählen.

*Beispiel.* Die konstante Funktion  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$ , ist integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

Denn für jede Zerlegung  $Z$  und jede Wahl der  $\xi_k \in I_k$  gilt

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^N c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) = c(b - a).$$

*Beispiel.* Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  wähle die Unterteilungspunkte  $x_k = a + k \frac{b-a}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , und die Stützstellen  $\xi_k = x_k$  mit  $k \geq 1$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= \sum_{k=1}^N \left( a + k \frac{b-a}{N} \right) \frac{b-a}{N} \\ &= a(b-a) + (b-a)^2 \frac{N(N+1)}{2N^2} \\ &\rightarrow \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad \text{mit } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es folgt mit Satz 4.1.2

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

*Beispiel.* Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stückweise stetig, wenn es eine Zerlegung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  gibt, so dass  $f$  auf jedem Intervall  $[x_{k-1}, x_k]$  stetig ist nach eventueller Abänderung in den Endpunkten  $x_{k-1}, x_k$ . Dies ist gleichbedeutend damit, dass die links- und rechtsseitigen Grenzwerte in den Punkten  $x_k$  existieren. Es ist plausibel, dass Satz 4.1.2 auch für stückweise stetige Funktionen gilt, das heißt alle Folgen von Riemannschen Summen  $S_{Z_n}(f)$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  haben einen gemeinsamen Grenzwert. Damit ist das Integral definiert, und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx. \quad (4.2)$$

Der einfachste Fall sind die (Riemannschen) Treppenfunktionen: für diese ist  $f$  auf  $(x_{k-1}, x_k)$  konstant gleich  $c_k \in \mathbb{R}$ , und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^N c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Im allgemeinen ist die Berechnung des Integrals als Grenzwert von Riemannschen Summen unpraktisch. Es ist viel effektiver, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung einzusetzen. Bevor wir diese Methode behandeln, sammeln wir einige Eigenschaften des Integrals.

**Satz 4.1.3** (Linearität des Integrals). *Für  $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

*Beweis.* Für jede Zerlegung  $Z$  mit Stützstellen  $\xi_k$  gilt

$$\begin{aligned} S_Z(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^N (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^N g(\xi_k) \Delta x_k \\ &= \alpha S_Z(f) + \beta S_Z(g). \end{aligned}$$

Wählen wir eine Folge  $Z_n$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$ , so folgt die Behauptung mit Satz 4.1.2.  $\square$

**Satz 4.1.4** (Monotonie des Integrals). *Seien  $f, g : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann folgt:*

$$f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in I \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

*Beweis.* Für jede Zerlegung  $Z$  mit Stützstellen  $\xi_k$  gilt

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^N g(\xi_k) \Delta x_k = S_Z(g).$$

Wähle wieder eine Folge  $Z_n$  mit  $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Satz 4.1.5.** *Für  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gelten die Ungleichungen*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq |b - a| \sup_I |f|.$$

*Beweis.* Für jede Zerlegung  $Z$  mit Stützstellen  $\xi_k$  gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^N |f(\xi_k)| \Delta x_k \leq \sup_I |f| \sum_{k=1}^N \Delta x_k = (b - a) \sup_I |f|.$$

Mit anderen Worten

$$|S_Z(f)| \leq S_Z(|f|) \leq (b - a) \sup_I |f|.$$

Die Abschätzungen folgen nun durch Wahl von  $Z_n$  wie oben.  $\square$

Aus der Monotonie des Integrals folgt mit dem Zwischenwertsatz der

**Satz 4.1.6** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien  $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es sei  $\varphi \geq 0$ . Dann gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit*

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

*Im Spezialfall  $\varphi = 1$  folgt  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ .*

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $\int_a^b \varphi(x) dx = 1$ . Setze  $m = \min_{x \in I} f(x)$  und  $M = \max_{x \in I} f(x)$ . Dann gilt  $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$ , also

$$m = \int_a^b m\varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \leq \int_a^b M\varphi(x) dx = M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$ .  $\square$