Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — Wintersemester 2022/23
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Projekt 1: FEM für die Poisson-Gleichung

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis, 16.11.22, 14Uhr

Wir betrachten die schwache Formulierung des Poisson-Problems in einem polygonalen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Nullrandwerten auf $\partial\Omega$, d. h. gesucht ist $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \; \mathrm{d}x \quad \text{ f. a. } \quad v \in H_0^1\Omega \Big). \tag{1}$$

Das Problem (1) ist äquivalent zum Minimierungsproblem $\min_{u \in H_0^1(\Omega)} I[u]$ mit

$$I[u] = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \; \mathrm{d}x - \int_\Omega fu \; \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Zur Diskretisierung des Problems betrachten wir eine Triangulierung $\mathcal{T}_h$ des Gebiets Ω bestehend aus Dreiecken mit maximaler Seitenlänge $h_{\max} \leq h$ und schränken das Problem ein auf den endlich-dimensionalen P_1-FE-Teilraum $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h) = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega)$, wobei

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) = \left\{ u_h \in C(\bar{\Omega}) : u_h|_T \in P^1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h \right\} \subset H^1(\Omega).$$

Zur Lösung des diskreten Minimierungsproblems eignen sich u. a. das implizite Gradientenverfahren

$$\frac{1}{\tau}\left(\left(\nabla u_h^k, \nabla v_h \right) - \left(\nabla u_h^{k-1}, \nabla v_h \right) \right) = -\delta I \left[u_h^k; v_h \right] \text{ f. a. } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h),$$

sowie das Newton-Verfahren

$$\delta^2 I \left[u_h^{k-1}; v_h, u_h^k \right] = \delta^2 I \left[u_h^{k-1}; v_h, u_h^{k-1} \right] - \delta I \left[u_h^{k-1}; v_h \right] \text{ f. a. } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h).$$

Aufgaben:

- Laden Sie den MatLab-Code zur Lösung des Poisson-Problems mittels P_1-FEM von der Vorlesungshomepage herunter und machen Sie sich damit vertraut (oder schreiben Sie wahlweise einen eigenen P_1-FEM-Code).
- Bestimmen Sie die experimentelle Konvergenzordnung in $L^2(\Omega)$ für ein $\left(H^2\right)-$reguläres Problem mit bekannter Lösung.
- Implementieren Sie sowohl das Gradientenverfahren mit Schrittweite $\tau = h$ als auch das Newton-Verfahren zur approximativen Lösung des diskreten Problems. Verwenden Sie dabei in den Iterationen das Abbruchkriterium $\tau^{-1} \left\| \nabla u_h^k - \nabla u_h^{k-1} \right\| \leq \epsilon_{\text{stop}} = 10^{-3}$ (mit $\tau = 1$ im Fall des Newton-Verfahrens).
- Betrachten Sie nun in (2) anstelle des linearen Quellterms $\int_\Omega fu \; \mathrm{d}x$ das nichtlineare Funktional $u \mapsto g[u] = \int_\Omega u^4 + fu \; \mathrm{d}x$ und lösen Sie das entstehende Minimierungsproblem nun mit Hilfe des semi-impliziten Gradientenverfahrens mit der diskreten Flussfunktion

  $$\hat{\delta} I_h \left[u_h^k, u_h^{k-1}; v_h \right] = -\left(\nabla u_h^k, \nabla v_h \right)_{L^2(\Omega)} + \delta g \left[u_h^{k-1}; v_h \right].$$

  Verwenden Sie dabei im expliziten Term die Quadratur $\int_\Omega \cdot \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathcal{I}_h[\cdot] \mathrm{d}x$.