Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Wintersemester 2022/23

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Projekt 4: Harmonische Abbildungen und die Simulation von Flüssigkristallen

Abgabe: per E-Mail an den Tutor bis, 14.12.22, 14Uhr

Teil 1. Wir betrachten harmonische Abbildungen in die Einheitssphäre welche für Simulationen von Flüssigkristallen verwendet werden. Im diskreten Fall bedeutet das, dass wir $u_h \in \mathscr{A}_h := \{v_h \in S^1(\mathscr{T}_h)^m \ : |v_h(z)| = 1 \text{ für alle } z \in \mathscr{N}_h, \ v_{h|\Gamma_D} = u_D\}$ suchen, sodass

$$(\nabla u_h, \nabla w_h) = 0$$

für alle $w_h \in \mathscr{F}[u_h] := \{w_h \in S^1_D(\mathscr{T}_h)^m \ : w_h(z) \cdot u_h(z) = 0 \text{ für alle } z \in \mathscr{N}_h\}$, wobei $m \in \{2, 3\}$. Wir setzen $\Omega = (-1, 1)^d$ für $d \in \{2, 3\}$ mit $d \leq m$ und $\Gamma_D = \partial\Omega$. Lösungen dieses Problems können durch folgenden Algorithmus (diskreter H^1-Fluss) approximiert werden:
Seien $u_h^0 \in \mathscr{A}_h$, $\theta \in [0, 1]$ und $\tau > 0$. Definiere die Folge $(u_h^k)_{k=0,1,\ldots} \subset \mathscr{A}_h$ durch Berechnen von $v_h^k \in \mathscr{F}[u_h^{k-1}]$ mit

$$(\nabla v_h^k, \nabla w_h) + (\nabla[u_h^{k-1} + \theta\tau v_h^k], \nabla w_h) = 0$$

für alle $w_h \in \mathscr{F}[u_h^{k-1}]$ und

$$u_h^k = \sum_{z \in \mathscr{N}_h} \frac{u_h^{k-1}(z) + \tau v_h^k(z)}{|u_h^{k-1}(z) + \tau v_h^k(z)|} \varphi_z.$$

Stoppe die Iteration, wenn $\|\nabla v_h^k\| \leq \varepsilon_{stop}$.
Dabei wird $v_h^k \in \mathscr{F}[u_h^{k-1}]$ als Nebenbedingung in jedem Schritt des Verfahrens verwendet. Dies kann beispielsweise durch Einführen von Lagrange–Multiplikatoren $\Lambda = (\lambda_z)_{z \in \mathscr{N}_h}$ realisiert werden. Das Gleichungssystem zur Berechnung von v_h^k hat dann die Form

$$\begin{bmatrix} S_m & B_{U^{k-1}}^\top \\ B_{U^{k-1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei S_m die P1-Steifigkeitsmatrix für Vektorfelder mit m Komponenten bezeichnet. Dabei wird $B_{U^{k-1}} \in \mathbb{R}^{L \times mL}$ mit $L = \sharp\mathscr{N}_h$ so konstruiert, dass die Bedingung $v_h^k \in \mathscr{F}[u_h^{k-1}]$ äquivalent zu $B_{U^{k-1}} V = 0$ ist.
Passen Sie das gegebene Programm für die allgemeinen Fälle $m, d \in \{2, 3\}$ mit $d \leq m$ an. Sie können Ihre Ergebnisse mithilfe der Matlab-Funktionen quiver ($m = 2$) bzw. quiver3 ($m = 3$) visualisieren.

Teil 2. (i) Untersuchen Sie für die Fälle $d = 2, m = 2$ und $d = 3, m = 3$ mit $u_D(x) = x/|x|$ und $d = 2, m = 3$ mit $u_D(x) = [x_1/|x|, x_2/|x|, 0]^\top$ die Konvergenzverhalten der Dirichlet Energien für verschiedene Feinheiten der Triangulierung. Interpretieren Sie die Resultate anhand der Visualisierungen der Lösungen.
(ii) Entfernen Sie den Normierungsschritt aus Ihrem Programm und untersuchen Sie die Verletzung der Bedingung $|u_h^k(z)| = 1$ für alle $z \in \mathscr{N}_h$ in Abhängigkeit der Schrittweite $\tau < 1$ in der L^∞-Norm.