Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Wintersemester 2022/23

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen: Blatt 1

Abgabe: Abgabe Mittwoch, 02.11.22 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Ein Gegebeispiel.*
Es sei

$$I[w] = \int_0^1 (|w'|^2 - 1)^2 + |w|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass $I[w]$ koerzitiv in $W^{1,4}$ ist, aber keinen Minimierer besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Eine schwach aber nicht stark konvergente Folge.*
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, nicht-konstante, 1-periodische (i.e., ($f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) Funktion und die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $W^{1,p}(0,1)$ für $p \in [1,\infty]$ gegeben durch

$$u_n(x) = f(nx).$$

(i) Zeigen Sie, dass u_n keinen starken Limes in L^p besitzt.
(ii) Zeigen Sie, dass $u \in L^p$ existiert mit $u_n \rightharpoonup u$ in L^p für $p < \infty$ beziehungsweise $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in L^∞. Identifizieren Sie die Funktion u.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Das Indikatorfunktional.*
Sei X ein Banachraum und $C \subseteq X$. Das Indikatorfunktional $I_C(x) : X \to \mathbb{R} \cup \infty$ sei für alle $x \in X$ definiert durch

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in C \\ +\infty & \text{falls } x \in X \setminus C. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:
(i) $I_C(x) : X \to \mathbb{R} \cup \infty$ ist nicht-trivial, d.h. $I_C(x) < \infty$ für ein $x \in X$, gdw. $C \neq \emptyset$.
(ii) $I_C(x) : X \to \mathbb{R} \cup \infty$ ist konvex gdw. C konvex ist.
(iii) $I_C(x) : X \to \mathbb{R} \cup \infty$ ist unterhalbstetig gdw. C abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** *Elliptische Regularisierung der Wärmegleichung.*
Die elliptische Regularisierung der Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch die PDG

$$u_t - \Delta u - \epsilon u_{tt} = 0 \text{ in } U_T, \tag{1}$$

wobei $\epsilon > 0$ and $U_T = U \times (0,T)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass (1) eine Euler-Lagrange-Gleichung ist, die einem Energiefunktional

$$I_\epsilon(w) := \iint_{U_T} L_\epsilon(Dw, w_t, w, x, t) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

entspricht.

<u>Tipp:</u> Suchen Sie nach einem Lagrangian mit einem Exponentialterm, der t enthält.