Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Wintersemester 2022/23

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen: Blatt 2

Abgabe: Abgabe Mittwoch, 09.11.22 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte). *Satz von Egoroff*
Seien $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, f$ messbare Funktionen, und nehme an

$$f_k \to f \quad f.u \text{ in } \ A,$$

wobei $A \subset \mathbb{R}$ messbar ist, $|A| < \infty$. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine messbare Teilmenge $E \subset A$, so dass

(i) $|A - E| < \epsilon$
und
(ii) $f_k \to f$ gleichmaessig auf E .

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Teil von Riesz-Fischer Satz*
Sei E eine messbare Menge und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $L^p(E)$ ein Banachraum. Beweisen Sie, dass wenn eine Folge $f_n \to f$, eine Teilfolge von f_n punktweise konvergiert f.u. gegen f in E.

Aufgabe 3 (4 Punkte). *Poisson–Problem mit Nichtlinearität*
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $F \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ konvex. Zeigen Sie, dass $I : \mathcal{A} := W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega F(u) \, dx \qquad \text{für alle } u \in \mathcal{A},$$

ein eindeutiges Minimum besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte). *Minimale Oberfläche Funktional*
Erklären Sie, warum die Methoden in Abschnitt 8.2 (L.C. Evans: Partial Differential Equations) nicht funktionieren, um die Existenz von Minimierern in

$$\mathcal{A} := \{w \in W^{1,q}(U) \ |w = g \text{ on } \partial U\},$$

für $1 \leq q < \infty$, fur das Funktional

$$I[w] := \int_U (1 + |Dw|^2)^{1/2} dx$$

zu beweisen.