Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Wintersemester 2022/23

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen: Blatt 4

Abgabe: Abgabe Mittwoch, 23.11.22 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Linearity of determinants along rank-one connections.*
Sei $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ und $T(\xi) := (\xi, \operatorname{adj}_2 \xi, \cdots, \operatorname{adj}_{n\wedge N} \xi)$ die Abbildung die einer Matrix ξ ihre Minoren zuordnet. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ mir $\operatorname{rank}\{\xi - \eta\} \leq 1$ und für alle $\lambda \in [0,1]$, gilt:

$$T(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) = \lambda T(\xi) + (1-\lambda)T(\eta).$$

(2) Für $D \subset \mathbb{R}^n$offen und beschränkt, $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}, \varphi \in W_0^{1,\infty}\left(D;\mathbb{R}^N\right)$, gilt:

$$T(\xi) = \frac{1}{|D|}\int_D T(\xi + \nabla\varphi(x))\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Zick-zack.*
Schauen Sie sich den Beweis zur folgenden Aussage (Dacorogna, Lemma 3.11) genau an.

Seien $N, n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit endlichem Maß. Sei $t \in [0,1]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ mit $\operatorname{rank}\{\alpha - \beta\} = 1$. Sei u_ξ so dass

$$\nabla u_\xi(x) = \xi = t\alpha + (1-t)\beta, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein u stückweise affin, und disjunkte offene Mengen $\Omega_\alpha, \Omega_\beta \subset \Omega$, so dass

$$\begin{cases} |\,|\Omega_\alpha| - t|\Omega|\,| \leq \epsilon, \quad |\,|\Omega_\beta| - (1-t)|\Omega|\,| \leq \epsilon, \\ u \equiv u_\xi \text{ nahe } \partial\Omega, \quad \|u - u_\xi\|_{L^\infty} \leq \epsilon, \\ \nabla u(x) = \begin{cases} \alpha & \text{in } \Omega_\alpha \\ \beta & \text{in } \Omega_\beta, \end{cases} \\ \operatorname{dist}(\nabla u(x),\ \operatorname{co}\{\alpha,\beta\}) \leq \epsilon \quad \text{f.ü. in } \Omega, \end{cases}$$

wobei $\operatorname{co}\{\alpha,\beta\} = [\alpha,\beta]$ die Strecke zwischen α und β ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Lipschitz.*
Zeigen Sie, dass konvexe, reellwertige Funktionen Lipschitzstetig sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** *Quasiminimalfläche.*
Sei u ein glatter minimierer des Flächenintegrals

$$I[w] = \int_U \left(1 + |Dw|^2\right)^{1/2}\,\mathrm{d}x,$$

mit gegebener Randbedingung $w = g$ auf ∂U und der Nebenbedingung

$$J[w] = \int_U w\,\mathrm{d}x = 1.$$

Zeigen Sie, dass der Graph von u eine konstante mittlere Krümmung besitzt.