Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Wintersemester 2022/23

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen: Blatt 5

Abgabe: Abgabe Mittwoch, 30.11.22 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte). *Übung 10 Evans Kap8:*
Verwenden Sie die Methoden aus §8.4.1, um die Existenz einer nichttrivialen schwachen Lösung $u \in H_0^1(U), u \neq 0$ von zu zeigen

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u \text{ in } \ U \\ u = 0 \text{ on } \partial U \end{cases}$$

für $1 < q < \frac{n+2}{n-2},\ n > 2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Übung 13, Evans Kap8: Duales Variationsprinzip*
Angenommen $f \in L^2(U)$. Beweisen Sie das duale Variationsprinzip

$$\min_{w \in H_0^1(U)} \int_U \frac{1}{2}|Dw|^2 - fw \ dx = \max_{\xi \ inL^2(U,\mathbb{R}^n)_{div \ \ \xi = f}} -\frac{1}{2}\int_U |\xi|^2 dx$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). *Übung 14 Evans Kap8: Mehrwertige PDE*
Zeigen Sie, dass die Variationsungleichung (26) für die Hindernisproblem in §8.4.2 (Evans) kann umgeschrieben werden als

$$-\Delta u + \beta(u - h) \ni f$$

für die mehrwertige Funktion

$$\beta(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } z > 0 \\ (-\infty, 0) & \text{if } z = 0 \\ \phi & \text{if } < 0 \end{cases}$$

Siehe auch Problem 3 in Kapitel 9. (Evans)

Aufgabe 4 (4 Punkte). *Übung 15 Evans Kap8: Punktweise Gradientenbeschränkung*

(a) Zeige, dass es einen eindeutigen Minimierer $u \in \mathcal{A}$ von gibt

$$I[w] = \int_U \frac{1}{2}|Dw|^2 - fw \ dx$$

wobei $f \in L^2(U)$ und $\mathcal{A} = \{w \in H_0^1(U) \mid \ |Dw| \leq 1 \ a.e\}$

(b) Beweisen Sie

$$\int_U Du.D(w-u) \ dx \geq \int_U f(w-u) \ dx$$

für alle $w \in \mathcal{A}$