Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
M.Sc. Eng. Aristide C. Hounkpe

Wintersemester 2022/23

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen: Blatt 7

Abgabe: Abgabe Mittwoch, 21.12.22 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Palais-Smale.*
Überprüfen Sie ob die folgenden Abbildungen die Palais-Smale-Bedinugung erfüllen.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\sin(x)$
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x) + xy^2$
(3) $I : L^2((-1, 1)) \to \mathbb{R}, u \mapsto \int_0^1 u(t)^2 \,\mathrm{d}t$
(4) $I : H_0^1((-1, 1)) \to \mathbb{R}, u \mapsto \int_{-1}^1 u'(t)^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 u(t)^2 \,\mathrm{d}t$
(5) $I : H_0^1((-1, 1)) \to \mathbb{R}, u \mapsto \int_0^1 u'(t)^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 u(t)^2 \,\mathrm{d}t$
(6) $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, u \mapsto \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{4}|u|^4\right] \mathrm{d}x$, where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ is a bounded domain.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Ein kritischer Wert.*
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = 9\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right)^2 + y\sin(x).$$

Benutzen das Mountain-Pass-Theorem um zu zeigen, dass f einen strikt positiven kritischen Wert besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Noch ein kritischer Wert.*
Sei $L > 0$ und $\Omega = (-L, L) \subset \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' + (u+1)^+ - u - 1 = 0 \text{ in } \Omega \\ u(-L) = u(L) = 0, \end{cases}$$

wobei $y^+ := \max\{0, y\}$ für $y \in \mathbb{R}$. Definieren Sie das zugehörige Funktional und zeigen Sie die Existenz eines nicht-trivialen kritischen Punktes.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
(a) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass f die Palais-Smale-Bedingung erfüllt, wenn $|f| + |f'|$ koerzitiv ist.
(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ von unten beschränkt und die Palais-Smale-Bedingung erfüllend. Zeigen Sie, dass f koerzitiv ist und ein Minimum annimmt.