A N A L Y S I S I

2021/2022

Patrick Dondl

Abteilung für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegende Strukturen

1.1 Aussagen

Als Aussage im Mathematischen Sinne bezeichnen wir ein sprachliches Gebilde, dem entweder der Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zugeordnet werden kann.
Mittels einer Wahrheitstabelle lassen sich einfache Zusammenhänge zwischen Aussagen Aussagen gut darstellen.

	Aussage	wahr/falsch
A	„Es sind mehr als 10 Personen im Rundbau“	w
B	„Es sind weniger als 20 Personen im Rundbau“	f

Aus gegebenen Aussagen lassen sich neue Aussagen generieren. A, B seien Aussagen.

1. Nicht A, („$\neg A$“) ist die Negation von A.

A	$\neg A$
w	f
f	w

2. A oder B („$A \vee B$“) ist wahr genau dann wenn mindestens eine der Aussagen A, B wahr ist. A und B („$A \wedge B$“) ist wahr genau dann, wenn beide Aussagen A, B wahr sind.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
w	w	w	w
f	w	w	f
w	f	w	f
f	f	f	f

3. Aus A folgt B („$A \Rightarrow B$“) ist wahr, genau dann wenn die Aussage A die Aussage B impliziert. A ist äquivalent zu B („$A \Leftrightarrow B$“) ist wahr, genau dann wenn die Aussage A die Aussage B impliziert und die Aussage B die Aussage A impliziert.

Bemerkung. Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, kann man annehmen, dass A wahr ist und muss dann B folgern.

1.2 Mengen und Aussageformen

Mengen: Die Frage, was eigentlich genau eine Menge ist, ist schwer zu beantworten. Wir begnügen uns damit, die Existenz einiger bestimmter Mengen anzunehmen und daraus neue Mengen zu generieren.
Die Objekte nennen wir *Elemente der Menge*. Die Notation $a \in M$ bedeutet, dass a ein Element der Menge M ist; andernfalls schreiben wir $a \notin M$. Die Entscheidung, ob irgendein Objekt a Element von M ist oder nicht, muss mithilfe der Beschreibung von M immer möglich sein.
Endliche Mengen lassen sich durch Aufzählung ihrer Elemente beschreiben, wir schreiben $A = \{1, 3, 15, 32\}$, als die Menge, welche die Zahlen 1, 3, 15 und 32 als Elemente enthält. Wir schreiben $1 \in A$ für „Die Menge A enthält das Element 1".

Beispiel. Das griechische Alphabet ist die Menge

$$M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega\}$$

Die Elemente sind die einzelnen Buchstaben, und wir haben M durch *Aufzählen aller Elemente* angegeben. Die Menge M bleibt gleich, wenn wir die Reihenfolge in der Aufzählung ändern. Oft werden die Elemente nur unvollständig aufgezählt in der Erwartung, dass man sich den Rest denken kann: $M = \{\alpha, \dots, \omega\}$.

Beispiel. Eine (erstaunlich) wichtige Menge ist die leere Menge $\emptyset$, welche keine Elemente enthält.

Eine Menge M heißt Teilmenge der Menge N, wenn jedes Element von M auch Element von N ist (Notation: $M \subset N$). Es gilt immer $\emptyset \subset N$. Gibt es außerdem mindestens ein Element von N, das nicht zu M gehört, so ist M eine echte Teilmenge von N. Statt $M \subset N$ schreiben wir manchmal auch $N \supset M$, also N ist Obermenge von M. Es gilt $A = B$, falls $A \subset B$ und $B \subset A$.
Aus gegebenen Mengen lassen sich auch auf andere Art neue Mengen erzeugen. X und Y seien Mengen.

1. Die Vereinigung $X \cup Y$ ist die Menge der Elemente, welche in X oder in Y (oder in beiden) sind.

2. Der Schnitt $X \cap Y$ ist die Menge der Elemente, welche sowohl in X als auch in Y sind.

3. Falls $X \subset Y$, so ist die Differenzmenge $Y \setminus X$ die Menge der Elemente, welche in Y aber nicht in X enthalten sind.

4. Ist A eine gegebene Grundmenge und $X \subset A$, so nennen wir $X^C = A \setminus X$ das Komplement von X. Das Komplement hängt von der Grundmenge X ab: die Aussage *ich trinke alles außer Ganter* hat verschiedene Bedeutung, je nachdem ob sie sich auf die alle badischen Biere bezieht oder auf alle alkoholischen Getränke.

5. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von M.

6. Das kartesische Produkt $X \times Y$ ist die Menge aller geordneten Paare (x, y), so dass $x \in X$ und $y \in Y$, d.h.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Es sei nun M eine Menge, und E eine Eigenschaft, von der für jedes Element in M überprüft werden kann, ob die Eigenschaft für dieses Element zutrifft. Wir nennen dann E ist eine „Aussageform“ und schreiben auch E(x) um die Abhängigkeit von x in M zu unterstreichen. $E(x)$ ist dann eine Aussage.
Man kann nun aus M eine Teilmenge mit den Elementen erzeugen, welche die Eigenschaft E besitzen. Wir schreiben

$$X = \{x \in M : E(x)\}$$

Bemerkung. Einige der oben eingeführten abgeleiteten Mengen lassen sich auch mithilfe von Aussageformen darstellen, so ist beispielsweise

$$X \cap Y = \{x \in X : x \in Y\} = \{x \in Y : x \in X\}.$$

Wir benötigen weiters die sogenannten Quantoren

$\forall\, a \in A : E(a)$	*für alle $a \in A$ gilt Eigenschaft $E(a)$*
$\exists\, a \in A : E(a)$	*es gibt ein $a \in A$ mit Eigenschaft $E(a)$.*

Aus Gründen der Lesbarkeit werden wir $\wedge, \vee, \neg$ nicht verwenden, und $\forall, \exists$ sowie $\Leftrightarrow$ eher sparsam.

Lemma 1.2.1. *Seien A, B, C Mengen. Es gilt*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Beweis. Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann folgt dass sowohl $x \in A$ als auch $x \in B$ oder $x \in C$. Somit ist $x \in A \cap B$ oder $A \cap C$ und auch in $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Damit ist gezeigt, dass $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Für die andere Inklusion sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Damit ist $x \in A \cap B$ oder $A \cap C$, also in jedem Fall $x \in A$, aber auch $x \in B$ oder C. Also folgt $x \in A \cap (B \cup C)$. □

1.3 Abbildungen

Definition 1.3.1. Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung von X nach Y (gleichbedeutend: eine Funktion auf X mit Werten in Y) ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \to Y,\, x \mapsto f(x).$$

Die Menge X heißt Definitionsbereich von f.
Mit dem Bild von f meinen wir die Menge der Bildpunkte (Menge der Funktionswerte)

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset Y.$$

Allgemeiner schreiben wir für $A \subset X$

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset Y.$$

Das Urbild einer Menge $B \subset Y$ unter f ist die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Der Graph von f ist die Teilmenge

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Verkleinern des Definitionsbereichs ergibt eine Einschränkung von f. Für $A \subset X$ ist

$$f|_A : A \to Y,\ \big(f|_A\big)(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in A.$$

Beispiel.

1. Eine naheliegende Abbildung ist $\mathrm{id}_X : X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$, die Identität oder identische Abbildung auf X.
2. Haben wir zwei Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$, so dass der Wertebereich von f gleich dem Definitionsbereich von g ist, dann können wir durch Hintereinanderausführen eine neue Abbildung $g \circ f\colon X \to Z$ als $x \mapsto g(f(x))$ definieren.

Lemma 1.3.2. *Die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist assoziativ, d.h. seien $h\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ und $f\colon Z \to U$ Abbildungen, so gilt $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.*

Beweis. Sei $x \in X$. Dann gilt $[f \circ (g \circ h)](x) = f(g(h(x))) = [(f \circ g) \circ h](x)$. □

Definition 1.3.3. $f : X \to Y$ heißt

injektiv wenn gilt: aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$ (oder, äquivalent, wenn aus $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$);

surjektiv wenn gilt: zu jedem $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ (also $Y = f(X)$);

bijektiv wenn f injektiv und surjektiv ist.

Für die Gleichung $f(x) = y$, mit $y \in Y$ gegeben, bedeuten die Begriffe Folgendes: f injektiv heißt, die Gleichung hat höchstens eine Lösung. f surjektiv heißt, es gibt mindestens eine Lösung. Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so hat die Gleichung genau eine Lösung. Indem wir jedem $y \in Y$ die jeweilige Lösung zuordnen, erhalten wir eine Abbildung $g : Y \to X$, $y \mapsto g(y)$, mit

$$f(g(y)) = y \text{ für alle } y \in Y, \ \text{ also } f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Wählen wir in der Gleichung als rechte Seite $y := f(x)$, so ist x die Lösung, das heißt

$$g(f(x)) = x, \ \text{ und damit } g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $g : Y \to X$ ebenfalls bijektiv ist. Wir nennen $g = f^{-1}$ die zu f inverse Abbildung oder Umkehrfunktion. Zusammenfassend gilt der folgende Satz.

Satz 1.3.4. *Sei $f\colon X \to Y$ bijektiv. Dann existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$ mit der Eigenschaft, dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Wir nennen g die Umkehrfunktion und schreiben $g = f^{-1}$.*

Beweis. Sei $y \in Y$. Aus Bijektivität der Abbildung f folgt Existenz (wegen Surjektivität) und Eindeutigkeit (wegen Injektivität) eines Elements $x \in X$ so dass $f(x) = y$. Wir definieren damit eine Abbildung $g\colon Y \to X$, welche jedem $y \in Y$ genau das oben genannte $x \in X$ zuordnet. Wir sehen weiter, dass $f(g(y)) = f(x) = y$ und $g(f(x)) = g(y) = x$. □

1.4 Die natürlichen Zahlen

Wir nehmen an, dass eine Menge, genannt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ existiert mit den folgenden Eigenschaften.

Peano Axiome der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl, d.h. $1 \in \mathbb{N}$.
2. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl $\nu(n)$, genannt Nachfolger von n.
3. Die Zahl 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Aus $\nu(n) = \nu(m)$ folgt $n = m$.
5. Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$. Falls zu jedem $n \in M$ gilt $\nu(n) \in M$, dann folgt bereits $M = \mathbb{N}$.

Zudem schreiben $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir können nun die Rechenregeln für die natürlichen Zahlen rekursiv definieren.

Definition 1.4.1. Auf den natürlichen Zahlen gibt es zwei Verknüpfungen, genannt Addition und Multiplikation, Eigenschaften

$$+ \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto a + b \quad \text{und} \quad \cdot \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

gegeben durch

$$\begin{array}{ll} a + 1 = \nu(a); & a + \nu(b) = \nu(a + b) \\ a \cdot 1 = a; & a \cdot \nu(b) = a \cdot b + a. \end{array}$$

Bemerkung.

- Die Rechenregeln für $\mathbb{N}_0$ lassen sich analog definieren.
- Subtraktion und Division in den ganzen Zahlen lassen sich definieren durch

  $$a - b = c, \text{ so dass } c + b = a \quad \text{und} \quad a/b = d, \text{ so dass } d \cdot b = a$$

  falls jeweils ein solches c bzw. $d \in \mathbb{N}$ bzw N_0 existieren.
- Wir schreiben $a > b$ falls $c \in \mathbb{N}$ existiert mit $a = b + c$.
- Wir nutzen die üblichen abkürzenden Schreibweisen für die Grundrechenarten und setzen falls nötig Klammern um die Reihenfolge der Ausführung von Operationen zu kennzeichnen.

Weiters führen wir das Summen- und das Produktzeichen ein.

Definition 1.4.2. Gegeben seien natürliche Zahlen a_1, a_2, $\ldots$, also a_j für jedes $j \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$\sum_{j=1}^{1} a_j = a_1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1}$$

sowie

$$\prod_{j=1}^{1} a_j = a_1 \quad \text{und} \quad \prod_{j=1}^{n+1} a_j = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j \right) \cdot a_{n+1}.$$

Bemerkung. 1. Wir vereinbaren $\sum_{j=1}^{0} a_j = 0$ und $\prod_{j=1}^{0} a_j = 1$. Die Definition für den Start bei anderen natürlichen Zahlen als der 1 sollte offensichtlich sein.

2. Wir schreiben $n! = \prod_{j=1}^{n} j$.

3. Wir schreiben $m^n = \prod_{j=1}^{n} m$.

Aus dem Peanoschen Axiomensystem lässt sich direkt das Beweisverfahren der vollständigen Induktion ablesen.

Satz 1.4.3. *Gegeben seien Aussagen $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gelte*

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.

Induktionsschritt: Falls $A(n)$ wahr ist (Induktionsvoraussetzung), so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{N}$ die Menge alle $n \in \mathbb{N}$, für welche $A(n)$ wahr ist. Aus dem 5. Peano-Axiom folgern wir sofort, dass $M = \mathbb{N}$. □

Bemerkung. Es sollte offensichtlich sein, wie man das Beweisverfahren der vollständigen Induktion auf z.B. auf andere Startwerte (oder die Null) verallgemeinert.

Satz 1.4.4. *Es gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis. Für $n = 1$ überprüfen wir $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Dies zeigt den Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt rechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} j &= \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

wobei wir am Anfang der zweiten Zeile die Induktionsvoraussetzung benutzt haben. □

Satz 1.4.5. *Sei M eine n-elementige Menge. Dann gilt $\mathcal{P}(M)$ enthält 2^n Elemente.*

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr, denn eine einelementige Menge enthählt als Teilmengen sowohl die leere Menge als auch sich selbst. Sei also für den Induktionsschritt nun M eine Menge mit $n+1$ Elementen und sei $a \in M$. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ lässt sich nun zerlegen in diejenigen Teilmengen welche a enthalten und diejenigen, welche a nicht enthalten. Die a nicht enthaltenden Teilmengen sind die Potenzmenge von $M \setminus \{a\}$, einer n-elementigen Menge. Deren Anzahl ist nach Induktionsvoraussetzung 2^n. Jede der Teilmengen welche a enthalten lässt sich schreiben als eine Teilmenge die a nicht enthält vereinigt mit a. Somit ist deren Zahl ebenfalls insgesamt 2^n. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ enthält damit $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Elemente. □

Definition 1.4.6. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gegeben durch

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ für } k > n \quad \text{und} \quad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}.$$

Bemerkung. Wir sehen, dass im Zähler so ein absteigendes Produkt $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ entsteht, und im Nenner ein aufsteigendes Produkt $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$. Somit ist auch $\binom{n}{k}$ immer ganzzahlig.

Satz 1.4.7. *1. Es gilt* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$.

2. Es gilt die Formel des Pascal'schen Dreiecks $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Beweis. 1. Die Rekursionsvorschrift in der Definition von $\binom{n}{k}$ ergibt einen Zähler $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$ als absteigendes Produkt und einen Nenner $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ als aufsteigendes Produkt. Die Aussage des Satzes folgt direkt.

2. Für $k > n$ steht beiderseits 0, für $k = n$ beiderseits 1. Falls $0 \le m < n$ rechnen wir nach 1. und der Definition

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n}{k}\left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k+1} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

□

Satz 1.4.8 (Binomialsatz)**.** *Für* $x, y \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Für den Fall $n = 0$ ist die Behauptung klar. Angenommen, die Aussage gilt für n, so rechnen wir

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{(n+1)-(k+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m y^{n+1-m} + \sum_{m=1}^{n+1}\binom{n}{m-1}x^m y^{(n+1)-m} \\ &= x^0 y^{n+1} + \sum_{m=0}^{n}\left(\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}\right)x^m y^{n+1-m} + x^{n+1}y^0 \\ &= \sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m}x^m y^{n+1-m},\end{aligned}$$

dank der Formel des Pascal'schen Dreiecks. □

Bemerkung. Diese Formel gilt natürlich auch für reelle Zahlen x, y.

1.5 Die reellen Zahlen

Die Axiome der reellen Zahlen. Es existiert eine Menge $\mathbb{R}$ mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{array}{lll} \text{Addition} & +\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & (x,y)\mapsto x+y, \\ \text{Multiplikation} & \cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & (x,y)\mapsto x\cdot y \end{array}$$

und den folgenden Eigenschaften.

1. $\mathbb{R}$ ist ein Körper,
2. $\mathbb{R}$ ist geordnet,
3. $\mathbb{R}$ ist vollständig.

Definition 1.5.1. Eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{array}{lll} \text{Addition} & +\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}, & (x,y)\mapsto x+y, \\ \text{Multiplikation} & \cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}, & (x,y)\mapsto x\cdot y \end{array}$$

heißt Körper, falls gilt:

K1. Addition und Multiplikation sind kommutativ: es gelten $x+y=y+x$ und $x\cdot y=y\cdot x$ für alle $x,y\in\mathbb{K}$.

K2. Addition und Multiplikation sind assoziativ: es gelten $(x+y)+z=x+(y+z)$ und $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ für alle $x,y,z\in\mathbb{R}$.

K3. Es existieren zwei Elemente $0,1\in\mathbb{K}$ mit $0\neq 1$, sodass $0+x=x$ und $1\cdot x=x$ für alle $x\in\mathbb{K}$ gelten. (Existenz neutraler Elemente)

K4. Für alle $x\in\mathbb{K}$ gibt es ein $u\in\mathbb{K}$ mit $x+u=0$; für alle $x\in\mathbb{K}$ mit $x\neq 0$ gibt es ein $v\in\mathbb{K}$ mit $x\cdot v=1$. Wir bezeichnen u mit $-x$ und v mit x^{-1} beziehungsweise mit $\frac{1}{x}$. (Existenz inverser Elemente)

K5. Es gilt das Distributivgesetz: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

Bemerkung. Man schreibt gelegentlich auch $\mathbb{K}(+,\cdot)$ um die Verknüpfungen kenntlich zu machen.

Proposition 1.5.2. *Es gilt*

1. *Das Null- und Einselement sind eindeutig bestimmt.*
2. *Die inversen Elemente aus K4 sind eindeutig bestimmt.*

Beweis. 1. Seien 0, $0'$ zwei Elemente, welche die Eigenschaften des Nullelements erfüllen. Dann gilt $0\overset{K3}{=}0'+0=\overset{K1}{=}+0'\overset{K3}{=}0'$ und die beiden Elemente sind gleich. Analog folgt der Beweis für das Einselement der Multiplikation.

2. Sei x in $\mathbb{K}$ gegeben und seien u,u' zwei inverse Elemente zu x bezüglich der Addition, d.h. $x+u=x+u'=0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u &\overset{K3}{=} 0+u \overset{K1}{=} u+0 \\ &\overset{K4}{=} u+(x+u') \overset{K2}{=} (u+x)+u' \overset{K1}{=} (x+u)+u' \overset{K3}{=} 0+u' = u. \end{aligned}$$

Die Rechnung für das inverse Element der Multiplikation folgt wieder analog.

$\square$

Bemerkung. Wir schreiben

$$x - y = x + (-y); \quad \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1} \text{ (falls } y \neq 0).$$

Lemma 1.5.3. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Dann gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$*

1. $(-x) + (-y) = -(x + y)$.
2. $(x^{-1})^{-1} = x$ *falls* $x \neq 0$.
3. $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.
4. $x \cdot 0 = 0$.
5. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
6. $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.
7. *Falls* $x \cdot y = 0$, *so folgt dass* $x = 0$ *oder* $y = 0$.

Beweis. Wir zeigen beispielhaft Aussagen 4 und 7 (auch genannt Nullteilerfreiheit). Die weiteren Aussagen sind eine Übung. Für Aussage 4 rechnen wir $x \cdot 0 \overset{K3}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{K5}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$. Addition des zu $x \cdot 0$ inversen Elements bezüglich der Addition ergibt $0 = x \cdot 0$.
Für Aussage 7 sei $x \neq 0$, denn falls $x = 0$ sind wir bereits fertig. Dann folgt

$$y \overset{K3}{=} 1 \cdot y \overset{K4}{=} \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot y \overset{K2}{=} \frac{1}{x} \cdot (xy) \overset{\text{Vorauss.}}{=} \frac{1}{x} \cdot 0 \overset{\text{Auss. 4}}{=} 0.$$

□

Definition 1.5.4. Die Aussage „$\mathbb{R}$ ist geordnet“ bedeutet, dass $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:

O1 (Trichotomie): Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften

$$x \in R^+; \quad x = 0; \quad -x \in \mathbb{R}^{\cdot}$$

O2 (Verträglichkeit): Aus $x, y \in \mathbb{R}^+$ folgt, dass $x + y \in \mathbb{R}^+$ und $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

Bemerkung.

1. Wir setzen $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cap \{0\}$ und nennen $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{R}_0^+$ die Menge der negativen reellen Zahlen.
2. Wir schreiben
$$\begin{array}{ll} x > y & \text{für } x - y \in R^+ \\ x \geq y & \text{für } x - y \in R_0^+ \\ x < y & \text{für } y - x \in R^+ \\ x \leq y & \text{für } y - x \in R_0^+. \end{array}$$
3. Wir schreiben $x < y < z$ für $x < y$ und $y < z$.

Proposition 1.5.5. *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit Ordnungsrelation $<$ erfüllen die folgenden Eigenschaften.*

1. *Transitivität: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.*

2. *Verträglichkeit mit Addition: Aus $x < y$ folgt für alle $z \in \mathbb{R}$, dass $x + z < y + z$.*

3. *Verträglichkeit mit Multiplikation: Aus $x < y$ folgt für alle $z > 0$, dass $x \cdot z < y \cdot z$.*

Beweis. 1. Nach Voraussetzung gilt $y - x \in \mathbb{R}^+$ und $z - y \in \mathbb{R}^+$. Damit folgt mit O2, dass $y - x + z - y = z - x \in \mathbb{R}^+$.

2. Sei nach Voraussetzung $y - x \in \mathbb{R}^+$. Da $(y + z) - (x + z) = y - x$ folgt die Aussage.

3. Dies folgt aus $yz - xz = (y - x)z$ und O2.

□

Lemma 1.5.6. *Es gelten die „üblichen Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen", insbesondere*

1. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$ *und* $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$.

2. $x < y \Leftrightarrow -y < -x$.

3. $x < y$ *und* $z < w \Rightarrow x + z < y + w$.

4. $x \cdot y > 0 \Leftrightarrow (x > 0$ *und* $y > 0)$ *oder* $(x < 0$ *und* $y < 0)$.

5. $x \cdot y < 0 \Leftrightarrow (x > 0$ *und* $y < 0)$ *oder* $(x < 0$ *und* $y > 0)$.

6. $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$. *Insbesondere gilt* $1 > 0$.

7. $x < y$ *und* $z < 0 \Rightarrow xz > yz$.

8. $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 0$.

9. *Aus* $x^2 < y^2$ *und* $y > 0$ *folgt* $x < y$.

Beweis. Wir zeigen beispielhaft Aussage 9. Angenommen $x \geq y$. Falls $y \leq 0$ so ist die Aussage gezeigt. Sei also $y > 0$. Mit Proposition 1.5.5(1) folgt $x > 0$. Somit gilt

$$x^2 \geq xy \quad \text{und} \quad xy \geq y^2,$$

da $x \geq y$ durch Multiplikation mit x bzw. mit y und Verwendung von 1.5.5(3). Somit folgt wegen 1.5.5(1) auch $x^2 \geq y^2$.
Die weiteren Aussagen verbleiben als Übung. □

Definition 1.5.7. Die Betragsfunktion ist gegeben durch

$$|\cdot| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Bemerkung. Es gilt offensichtlich $|x| \geq 0$ und $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$.

Definition 1.5.8. 1. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt), falls $K \in \mathbb{R}$ existiert mit $x \leq K$ für alle $x \in A$ (bzw. $x \geq K$ für alle $x \in A$.

Ein solches K heißt obere Schranke (bzw. untere Schranke) von A.

2. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel. Die Menge $\{1, 2, 3\}$ ist beschränkt, untere Schranken sind z.B. 1, -10, oder -1000. Die Menge $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt[1], nach unten schon.

Definition 1.5.9. Eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ heißt kleinste obere Schranke (bzw. größte untere Schranke) von $A \subset \mathbb{R}$ falls K obere Schranke (bzw. untere Schranke) ist und es keine kleinere obere (bzw. größere untere) Schranke von A gibt. Wir bezeichnen dann K als Supremum von A, kurz $\sup A$ (bzw. Infimum von A, $\inf A$.

Bemerkung. Sei $A \subset \mathbb{R}$.

- Falls A nach oben beschränkt ist, so schreiben wir auch $\sup A < +\infty$.
- Falls A nicht nach oben beschränkt ist, so schreiben wir $\sup A = +\infty$.
- Falls A nach unten beschränkt ist, so schreiben wir auch $\inf A > -\infty$.
- Falls A nicht nach unten beschränkt ist, so schreiben wir $\inf A = -\infty$.
- Man sieht auch die Schreibweise $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

Das + von $+\infty$ kann man auch weglassen.

Beispiel. Das Infimum der Menge $\{1, 2, 3\}$ ist 1.

Definition 1.5.10. Die Aussage „$\mathbb{R}$ ist vollständig“ bedeutet, dass jede nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$ besitzt.

Bemerkung. Wie wir sehen werden gilt das in der Menge der Rationalen Zahlen nicht.

Satz 1.5.11. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer.*

1. *Falls $\sup A < +\infty$, so existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in A$ so dass $x > (\sup A) - \epsilon$.*
2. *Falls $\sup A = +\infty$ so existiert zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $x \in A$ mit $x > K$.*

Bemerkung. Die analogen Aussagen gelten für das Infimum.

Beweis.

1. Wir beweisen die Aussage durch Widerspruch. Es gelte also $\sup A < +\infty$ – als Verneinung der Aussage existiere ein $\epsilon > 0$ so dass für alle $x \in A$ gilt $x \leq (\sup A) - \epsilon$. Damit ist aber $(\sup A) - \epsilon$ eine obere Schranke von A. Nachdem $(\sup A) - \epsilon < \sup A$ kann aber nun $\sup A$ nicht die *kleinste* obere Schranke gewesen sein. Dies ist ein Widerspruch.
2. Falls $K \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in A$ gilt $x \leq K$, so ist K eine obere Schranke von A und somit $\sup A \neq +\infty$.

□

Definition 1.5.12. Sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein Element $M \in A$ heißt Maximum von A, falls $M \in A$ und M obere Schranke von A. Wir schreiben $\max A = M$.
Analog definieren wir das Minimum $\min A$ von A.

Beispiel. Es gilt $\max\{1, 2, 3\} = 3$. Die Menge $A = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\}$ besitzt ein Minimum, nämlich -1 aber kein Maximum. Es gilt aber $\sup A = 0$.

[1] Achtung: So klar ist das noch nicht – in Kürze dazu mehr

Proposition 1.5.13. *1. Falls M ein Maximum besitzt, so ist dieses eindeutig bestimmt.*

2. Falls A nicht leer ist und $\sup A < +\infty$, so besitzt A genau dann ein Maximum, falls $\sup A \in A$. Dann gilt $\max A = \sup A$.

Beweis. 1. Seien M_1, M_2 Maxima von M. Es folgt $M_1 \leq M_2$ und $M_2 \leq M_1$, also $M_1 = M_2$.

2. Angenommen $M = \max A$ existiert. Dann ist M eine obere Schranke von A und somit $\sup A \leq M$ als kleinste obere Schranke. Nachdem aber auch $\sup A$ eine obere Schranke ist folgt $M \leq \sup A$, denn $M \in A$. Also gilt $M = \sup A$.

   Falls andererseits $\sup A = M \in A$, so ist M eine obere Schranke also auch $\max A = M$.

□

Definition 1.5.14. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir definieren die Intervalle

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ („abgeschlossen")
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ („offen")
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ („halboffen")
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ („halboffen").

Die Zahlen a, b sind die Intervallgrenzen des Intervalls. Man kann auch die offenen Intervallgrenzen $\pm\infty$ zulassen.

Bemerkung. Sei I ein Intervall mit Grenzen $a < b$. Dann gilt $\sup I = b$, $\inf I = a$.

Definition 1.5.15. Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ induktiv, wenn gilt

1. $1 \in A$
2. Falls $x \in A$ so gilt auch $x + 1 \in A$.

Proposition 1.5.16. *Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind die kleinste induktive Teilmenge der reellen Zahlen*[2].

Beweis. Wir sehen sofort, dass $\mathbb{N}$ als Teilmenge der natürlichen Zahlen induktiv ist (durch Identifikation des Nachfolgers $\nu(a) = a + 1$). Nun sei $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \mathbb{N}$. Dann kann M nicht induktiv sein. In der Tat, sei $a \in \mathbb{N} \setminus M$. Damit ist $\max\{x \in M : x < a\} + 1 \notin M$, aber $\max\{x \in M : x < a\} \in M$ (Übung: Diese Menge ist eine endliche Menge, somit existiert das Maximum). □

Definition 1.5.17. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind die Menge $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}\}$. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind die Menge $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \text{ existieren mit } x = \frac{p}{q}\}$.

Satz 1.5.18 (Archimedes)**.** *1. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > x$. Insbesondere ist $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt.*

2. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $m < x$. Insbesondere ist $\mathbb{Z}$ nicht nach unten beschränkt.

[2] Damit meinen wir: Falls $M \subset \mathbb{R}$ induktiv, so gilt $\mathbb{N} \subset M$.

3. *Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < \epsilon$.*

Beweis. 1. Zu einem Widerspruchsbeweis sei $x \in \mathbb{R}$, so dass $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit wäre aber $\mathbb{N}$ endlich (als beschränkte Teilmenge der natürlichen Zahlen, siehe Übung) und es existiert $a = \max \mathbb{N}$. Aber $a + 1 > a$ und wegen Induktivität gilt $a + 1 \in \mathbb{N}$.

2. Folgt direkt aus 1.

3. Zu $\frac{1}{\epsilon}$ existiert nach 1. ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\epsilon}$. Damit folgt $\frac{1}{n} < \epsilon$.

□

Satz 1.5.19. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.*

Beweis. Sei $\epsilon = y - x$ und $n > \frac{1}{\epsilon}$. Wir setzen $A = \{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} > x\}$. Dank Satz 1.5.18 ist A nicht leer. Weiters ist A nach unten beschränkt, denn $k \geq nx$ für alle $k \in A$. Als nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge der ganzen Zahlen besitzt A ein Minimum m (siehe Übungen). Damit ist $x < \frac{m}{n} \in Q$. Weiters gilt auch $\frac{m}{n} < y$. Andernfalls wäre $m \geq ny = n(x + \epsilon) = nx + n\epsilon > nx + 1$, also $m - 1 \in A$. Dies ist ein Widerspruch zu m als untere Schranke von A. □

Satz 1.5.20. *Sei $c \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, so dass $x^2 = c$.*

Bemerkung. Wir schreiben dann $x = \sqrt{x}$ bzw. $x = c^{\frac{1}{2}}$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass aus $x^2 = 0$ folgt $x = 0$. Damit ist die Aussage nur noch für $c > 0$ zu beweisen.

Eindeutigkeit: Angenommen $x^2 = c$ und $y^2 = c$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Dann folgt $0 = c - c = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Nachdem $x + y > 0$ folgt $x - y = 0$ (Nullteilerfreiheit) also $x = y$.

Ein Kandidat für x: Sei $A = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0, r^2 \leq c\}$. Dann ist A nicht leer, denn $0 \in A$. Aber A ist auch nach oben beschränkt, denn für $r \in A$ gilt $r \leq c + 1$. In der Tat sei $r > c + 1$, damit folgt $r^2 > (c + 1)^2 \geq c + 1$. Wir setzen $x = \sup A \in \mathbb{R}$.

$x^2 \geq c$: Sei zum Widerspruch $x^2 < c$. Wir konstruieren ein $\epsilon > 0$ so dass $x + \epsilon \in A$. Zunächst rechnen wir für $0 < \epsilon < 1$

$$(x + \epsilon)^2 = x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 \leq x^2 + \epsilon(2x + 1).$$

Falls also $0 < \epsilon < 1$ und $\epsilon \leq \frac{c - x^2}{2x + 1}$, so folgt $(x + \epsilon)^2 \leq c$. Da $\frac{c - x^2}{2x+1} > 0$ ergibt sich der Widerspruch.

$x^2 \leq c$: Folgt mit Widerspruch unter der Annahme, dass $x^2 > c$ ähnlich zur vorigen Rechnung, denn $(x - \epsilon)^2 \geq c$ falls $\epsilon \leq \frac{x^2 - c}{2x}$. Für $\epsilon = \min\{\frac{x^2 - c}{2x}, \frac{x}{2}\}$ folgt $(x - \epsilon)^2 \geq c$ und $x - \epsilon \geq 0$. Da $x - \epsilon > 0$ (denn $x^2 > c > 0$) wäre auch $x - \epsilon$ eine obere Schranke von A und es folgt wieder ein Widerspruch zu x als *kleinste* obere Schranke von A.

Schluss: Es bleibt nur $x^2 = c$.

□

Satz 1.5.21. *Für jedes $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, so dass $x^n = c$.*

Beweis. Analog zu Satz 1.5.20 □

Bemerkung. Für $x \geq 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ setzen wir $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$. Für $x > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ setzen wir $x^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}$. Die üblichen Rechenregeln für Exponenten lassen sich leicht nachprüfen.

Proposition 1.5.22. *Es gilt* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Angenommen $\sqrt{2} = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. Wir dürfen annehmen, dass höchstens eine der Zahlen $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar ist – ansonsten kürzen wir den Bruch. Es gilt nun aber $k^2 = 2n^2$ Damit ist k^2 gerade (ganzzahlig durch zwei teilbar). Wenn k^2 gerade ist, so ist auch k gerade. Damit wäre aber auch $s^2 = \frac{1}{2}k^2$ gerade – ein Widerspruch. □

Kapitel 2

Reelle Folgen

2.1 Konvergenz

Definition 2.1.1. Eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nennen wir reelle Folge. Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird genau eine Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Für eine solche Folge schreiben wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, oder – intuitiver $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Beispiel.

1. Die konstante Folge mit Wert $a \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a, a, a, \dots)$, also $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Die harmonische Folge ist gegeben durch $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3. Die geometrische Folge zu $q \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch $a_n = q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
4. Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv gegeben durch
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_{n+1} + a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$
5. Sei $a \in \mathbb{N}$. Dann ist die Collatz-Folge gegeben durch die Vorschrift
$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 3a_n + 1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$
Übung: Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{N}$ die Collatz-Folge in die kurzen zyklische Sequenz 1, 4, 2, 1, etc. eintritt.

Definition 2.1.2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a für n gegen Unendlich, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \epsilon$. Wir schreiben in diesem Fall
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \ \ (n \to \infty).$$

Bemerkung.

1. Im Allgemeinen wird N von ϵ abhängen.
2. Zu $\epsilon > 0$ heißt das Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ auch ϵ-Umgebung von a. Konvergenz einer Folge gegen a bedeutet, dass für jedes $\epsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder außerhalb der ϵ-Umgebung von a liegen.

3. In Quantoren geschrieben liest sich Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ als

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$$

4. Falls es zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein a gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so nennen wir die Folge konvergent, andernfalls divergent. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ so nennen wir a_n eine Nullfolge.

5. Der Grenzwert einer Folge wird oft lateinisch als Limes bezeichnet.

Beispiel. 1. Die konstante Folge $a_n = a$ konvergiert gegen den Grenzwert a.

In der Tat, sei $\epsilon > 0$. Dann gilt $|a_n - a| = 0 < \epsilon$ für jedes $n \geq 1 = N$.

2. Die harmonische Folge ist eine Nullfolge.

In der Tat, zu $\epsilon > 0$ finden wir dank Satz 1.5.18 ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{N} < \epsilon$. Damit folgt $|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

3. Für $|q| < 1$ ist die geometrische Folge eine Nullfolge.

Beweis: Sei $x = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$. Mit der Bernoulli'schen Ungleichung (Übung) sehen wir, dass $\frac{1}{|q|^n} = (1+x)^n \geq 1 + nx$. Damit folgt aber $|q^n - 0| = |q|^n \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} < \epsilon$ für $n \geq \frac{x}{\epsilon} = N$.

4. Die Folge gegeben durch $a_n = (-1)^n$ ist divergent.

Angenommen $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Dann existiert zu $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N$. Dann gilt aber

$$2 = |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1 + 1 = 2.$$

Ein Widerspruch.

Bemerkung. Sei (a_n) eine konvergente Folge. Dann ist deren Grenzwert eindeutig bestimmt. Um das zu sehen gelte $a_n \to a$ und $a_n \to b$ für $n \to \infty$. Falls $a \neq b$ sei $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$, so dass $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (b - \epsilon, b + \epsilon) = \emptyset$. Damit kann kein $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - a| < \epsilon$ und $|a_n - b| < \epsilon$.

Satz 2.1.3. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es gelte $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Zu $\epsilon = 1$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Somit folgt $|a_n| \leq 1 + |a|$ für $n \geq N$ und insgesamt

$$|a_n| \leq max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

Bemerkung. Eine Folge heißt beschränkt, falls die Bildmenge der zugehörigen Abbildung beschränkt ist als Teilmenge der reellen Zahlen.

Satz 2.1.4. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen mit Grenzwerten a bzw. b. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab$.

3. *Falls* $b \neq 0$ *und* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so gilt auch* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Beweis. 1. Aus Konvergenz der beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, dass zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Damit gilt aber $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \epsilon$ für $n \geq \mathbb{N}$.

2. Nach Satz 2.1.3 existiert $M \in \mathbb{R}$ so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Konvergenz der beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt wieder, dass dass zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(M+1)}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2b}$. Damit folgt aber

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \leq |a_nb_n - a_nb| + |a_nb - ab| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| < \epsilon$$

für $n \geq N$.

3. In Anbetracht von Punkt 2 reicht es die Aussage für die konstante Folge $a_n = 1$ zu zeigen. Aus Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b \neq 0$ existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| \geq \frac{b}{2}$ für $n \geq N_1$, man sieht dies durch Setzen von $\epsilon = \frac{b}{2}$ in der Definition der Folgenkonvergenz.

Sei $\epsilon > 0$. Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garantiert dann Existenz von $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{b^2}{2}\epsilon$ für $n \geq N_2$. Wir rechnen

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_nb}\right| \leq \frac{2}{b^2}|b_n - b| < \epsilon$$

für $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$.

□

Satz 2.1.5. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit Grenzwerten* a *bzw.* b. *Dann gilt*

1. *Falls* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *so folgt* $a \leq b$.

2. *Falls* $a = b$ *und* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *so folgt, dass auch die Folge* $(c_n)n \in \mathbb{N}$ *konvergent ist mit Limes* $\lim_{n\to\infty} c_n = a = b$.

Beweis. 1. Zum Widerspruch sei $a > b$. Wir setzen $\epsilon = \frac{a-b}{2}$. Damit folgt aber durch Konvergenz der Folgen $a_n \to a$, $b_n \to b$, dass $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > a - \frac{a-b}{2}$ und $b_n < b - \frac{a-b}{2}$ für $n \geq N$ und somit $a_n > b_n$ für $n \geq N$. Ein Widerspruch.

2. Sei $N \in N$ so, dass $|a_n - a| < \epsilon$, $|b_n - b| < \epsilon$ für $n \geq N$. Wir rechnen für $n \geq N$

$$\begin{aligned} c_n - a &\leq b_n - a = b_n - b < |b_n - b| < \epsilon \\ a - c_n &\leq a - a_N \leq |a_n - a| < \epsilon \end{aligned}$$

und es folgt $|c_n - a| < \epsilon$.

□

Bemerkung. Eine strikte Ungleichung kann im allgemeinen nicht geschlossen werden. So ist z.B. $a_n = \frac{1}{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definition 2.1.6. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ falls zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > K$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben $a_n \to +\infty$ (für $n \to \infty$). Analog definieren wir bestimmte Divergenz gegen $-\infty$.

Satz 2.1.7.

1. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bestimmt divergent gegen $+\infty$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ (wobei gegebenenfalls endlich viele Folgenglieder bei denen $a_n = 0$ ist verworfen werden müssen).*

2. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, wobei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ (für $n \to \infty$).*

3. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.*

4. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach unten beschränkte Folge. Dann ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.*

Beweis. 1.-3.: Übung. Zu 4. Sei $M \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke zu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $K \in \mathbb{R}$. Die bestimmte Divergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garantiert Existenz von $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > K - M \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq N$. Es folgt, dass $a_n + b_n \geq K - M + b_n \geq K$ für $n \geq N$. □

Definition 2.1.8. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend wenn gilt $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt streng monoton wachsend wenn gilt $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog ist (streng) monoton Fallend definiert.

Satz 2.1.9. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent wenn sie beschränkt ist.*

Beweis. Da konvergente Folgen beschränkt sind, genügt es zu zeigen, dass monoton wachsende, beschränkte Folgen konvergieren. Sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt. Wir setzen $a = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 1.5.11 existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > a - \epsilon$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, folgt $a_n > a - \epsilon$ für alle $n \geq N$. Da a eine obere Schranke ist folgt auch $a_n \leq a$ und die Konvergenz ist gezeigt. □

2.2 Intervallschachtelungen

Definition 2.2.1. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n < b_n$ so dass gilt

$$I_{n+1} \subset I_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0.$$

Satz 2.2.2. *Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, dann existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung. Wir schreiben auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x : x \in A_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x : x \in A_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ für den Schnitt bzw. die Vereinigung über eine Folge von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Da gilt $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muss die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend sein. Weiters gilt aber $a_1 \leq a_n \leq b_1$ und $b_1 \geq b_n \geq a_1$, beide Folgen sind also auch beschränkt und konvergieren somit gegen a bzw. b dank Satz 2.1.9. Aus diesem Satz folgt ebenfalls $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, somit gilt $\{a, b\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Zur Eindeutigkeit seien $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ mit $x \leq y$. Dann folgt

$$0 \leq y - x \leq b_n - a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit Satz 2.1.5 Punkt 2 folgt $y - x = 0$, da $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$. □

Beispiel. Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die selbe Zahl $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$, die Euler'sche Zahl – welche wir später näher kennen lernen werden.
Um die Konvergenz zu sehen bemerken wir zunächst, dass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, da für $n \geq 2$ und der Bernouilli-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \geq \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \geq 1.
\end{aligned}$$

Da weiters $a_n < b_n \leq b_1 = 4$ und somit $0 < b_n - a_n = a_n(1 + \frac{1}{n} - 1) = \frac{a_n}{n} \leq \frac{4}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Satz 2.1.5 Punkt 2, dass $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Satz 2.2.2 zeigt die behauptete Konvergenz zu einer Zahl genannt Euler'sche Zahl e.

2.3 Teilfolgen und Häufungspunkte

Definition 2.3.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $k \mapsto n(k) \in \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, also $n(k+1) \geq n(k) + 1$. Dann heißt die Folge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung. Wir schreiben auch a_{n_k} für $a_{n(k)}$.

Lemma 2.3.2. *Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.*

Beweis. Folgt direkt aus den Definitionen. In der Tat, sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Da für $n(k)$ aus der Definition von Teilfolgen gilt $n(k) \geq k$ folgt sofort, dass $|a_{n(k)} - a| < \epsilon$ für $k \geq N$. □

Definition 2.3.3. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls eine Teilfolge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass $a_{n(k)} \to a$ (für $k \to \infty$).

Proposition 2.3.4. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *a ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Zu jedem $\epsilon > 0$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \geq N$ so dass $|a_n - a| < \epsilon$.*
3. *Für jedes $\epsilon > 0$ enthält die Menge $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon\}$ unendlich viele Elemente.*

Beweis. Übung. □

Definition 2.3.5. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind der Limes inferior bzw. der Limes superior gegeben durch

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\} \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

Proposition 2.3.6. *Für beschränkte Folgen existieren die Limiten in Definition 2.3.5.*

Beweis. Wir setzen $b_n = \inf a_k : k \geq n$, $c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Die so definierten folgen sind beschränkt und monoton wachsend bzw. monoton fallend. Somit existieren die Limiten. □

Bemerkung.

1. Für nach unten unbeschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ setzen wir $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
2. Für nach oben unbeschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es zwei Möglichkeiten: Falls der Limes in 2.3.5 existiert, so setzen wir den $\liminf$ auf den jeweiligen Limes. Falls dieser nicht existiert, so schreiben wir $\liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
3. Analog gehen wir für den $\limsup$ vor.

Lemma 2.3.7. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann ist $\liminf_{n\to\infty} a_n$ der kleinste und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ der größte Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Beweis von Proposition 2.3.6 definiert. Dann ist $b = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Seien nun $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Da $b_n \to b$ für $n \to \infty$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, existiert $K \in \mathbb{N}$, $K \geq N$ mit

$$b \geq b_n > b - \epsilon \quad \text{für alle } n \geq K.$$

Nach der Definition von b_K und Satz 1.5.11 ein $n \geq K$ mit $a_n \leq b_K + \epsilon$. Somit folgt

$$b - \epsilon < b_K \leq a_n \leq b_K + \epsilon.$$

Nach Proposition 2.3.4 ist b ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Analog lässt sich zeigen, dass $c = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ ein Häufungspunkt ist.
Sei nun $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Teilfolge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $x = \lim_{k\to\infty} a_{n(k)}$. Es gilt $b_{n(k)} \leq a_{n(k)}$, so dass aus Satz 2.1.5 folgt, dass $b \leq x$. Damit ist $b = \liminf_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Auch hier folgt die Rechnung für den $\limsup$ analog. □

Satz 2.3.8 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungspunkt in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Der $\liminf$ der Folge existiert nach Proposition 2.3.6 und ist ein Häufungspunkt nach Lemma 2.3.7. □

Folgerung 2.3.9. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent.*
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *besitzt genau einen Häufungspunkt.*
3. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. Lemma 2.3.2.

2. $\Rightarrow$ 3. Proposition 2.3.7.

3. $\Rightarrow$ 1. Wir behaupten, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Angenommen das wäre falsch. Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n(k) \geq k$ existiert mit $|a_{n(k)} - a| > \epsilon$. Somit existiert eine Teilfolge $(a_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$|a_{n(k)} - a| \geq \epsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Aus Beschränktheit folgt mit Satz 2.3.8 Existenz eines Häufungspunktes b dieser Teilfolge. Wegen (2.1) folgt $|b - a| \geq \epsilon$, aber beides sind Häufungspunkte, die nach Lemma 2.3.7 zwischen $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ liegen müssen. Diese sind nach Voraussetzung gleich und somit ergibt sich ein Widerspruch.

□

2.4 Cauchy-Folgen

Definition 2.4.1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Satz 2.4.2. *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Nach Definition existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1$ für $n, m \geq N$. Damit folgt aber

$$|a_j| \leq \max\{|a_N| + 1, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}\} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 2.4.3 (Cauchy-Kriterium). *Eine reelle Folge ist genau dann eine Cauchy-Folge wenn sie konvergiert.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N$ und es folgt

$$|a_n - a_m| = |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{für } n, m \geq N.$$

„$\Rightarrow$“: Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Als nach Satz 2.4.2 beschränkte Folge besitzt sie einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ mit Teilfolge $a_{n(k)} \to a$ für $k \to \infty$. Wir behaupten, dass sogar gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Sei also $\epsilon > 0$ und $K \in \mathbb{N}$ so dass $|a_{n(k)} - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $k \geq K$. Weiters sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n, m \geq N$. Nun sei $k \geq K$ mit $n(k) \geq N$. Für $n \geq N$ gilt dann

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n(k)} + a_{n(k)} - a| \leq |a_n - a_{n(k)}| + |a_{n(k)} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

und Konvergenz ist gezeigt.

□

Bemerkung. 1. Um Konvergenz einer reellen Folge zu zeigen, genügt der Nachweis, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist. Das ist häufig einfacher als der direkte Nachweis der Konvergenz.

2. Eine rationale Cauchy-Folge konvergiert mit einem Limes in $\mathbb{R}$, der Limes ist aber im Allgemeinen nicht rational.

3. Nimmt man direkt an, dass jede reelle Cauchy-Folge konvergiert, so lässt sich hieraus die Vollständigkeit der reellen Zahlen zeigen.

Kapitel 3

Reihen

3.1 Konvergenz von Reihen

Definition 3.1.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir betrachten die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Wir nennen dann $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (unendliche) Reihe.

Definition 3.1.2. Eine Reihe heißt konvergent falls die zugehörige Folge der Partialsummen konvergiert.

Beispiel.

1. Sei $-1 < q < 1$. Die zur geometrischen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k = q^k$ gehörende Reihe heißt geometrische Reihe. Die Partialsummen der geometrischen Reihe sind gegeben durch
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
Es ist leicht zu sehen, dass diese Reihe konvergiert, da $1 - q^{n+1} \to 1$ für $|q| < 1$ und $n \to \infty$.

2. Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent gegen $+\infty$.
Um das zu sehen rechnen wir mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, dass
$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$
Damit kann s_n keine Cauchy-Folge sein. Aus monotonem Wachstum folgt damit weiter bestimmte Divergenz gegen $+\infty$.

Satz 3.1.3. *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ konvergent mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Folgt direkt aus der analogen Aussage zur Folgenkonvergenz angewendet auf die Folge der Partialsummen. ☐

Satz 3.1.4 (Cauchy-Kriterium)**.** *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann wenn gilt: Zu jedem* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $N \in \mathbb{N}$ *so dass* $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \epsilon$ *für alle* $m, n \geq N$*. Insbesondere ist für konvergente Reihen die Folge der Summanden immer eine Nullfolge.*

Beweis. Folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium zur Folgenkonvergenz angewendet auf die Folge der Partialsummen. ☐

Bemerkung. Aus der Eigenschaft, dass die Folge der Summanden einer Reihe eine Nullfolge ist, folgt *nicht* Konvergenz der Reihe – ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe.

Satz 3.1.5 (Reihen und Ungleichungen)**.** *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Folgen. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

1. *Falls* $0 \leq a_k \leq b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und es gilt*
$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$
2. *Falls* $a_k \geq b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$*, dann gilt auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$*.*

Beweis. Auch dies folgt direkt aus den entsprechenden Aussagen zur Folgenkonvergenz angewendet auf die Folge der Partialsummen. ☐

Beispiel. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent, denn für alle $k \geq 2$ gilt

$$0 \leq a_k = \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = b_k.$$

Wählen wir zusätzlich $b_1 = 1$, so folgt $a_k \leq b_k$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist aber konvergent, da

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

dank eines Teleskopsummenarguments (d.h., durch die alternierenden Vorzeichen heben sich alle Summanden außer dem ersten und dem letzten weg).

Satz 3.1.6 (Leibniz-Kriterium)**.** *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$*.*

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Wir rechnen unter Benutzung der Monotonie der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für n gerade, dass

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots \geq 0 \sum_{k=n}^{m} a_k = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \leq a_{n+1}.$$

Analog bekommen wir für n ungerade

$$-a_{n+1} \leq \sum_{k=n}^{m} a_k \leq 0.$$

Da die a_n eine Nullfolge bilden folgt mit den Cauchy-Kriterium (Satz 3.1.4) Konvergenz. ☐

Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ist konvergent.

Definition 3.1.7. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 3.1.8. *Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent und es gilt*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ und erfüllt somit das Cauchy-Kriterium (Satz 3.1.4). Für $m > n$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

und somit erfüllt auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ das Cauchy-Kriterium. Die Abschätzung folgt ebenfalls durch Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Partialsummen und Nutzung von Satz 2.1.5. □

Satz 3.1.9 (Majorantenkriterium). *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe sowie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe. Falls ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|a_k| \leq c_k \quad \textit{für alle } k \geq k_0$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Bemerkung. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ heißt in diesem Fall *Majorante* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis von Satz 3.1.9. Folgt direkt aus Satz 3.1.5. □

Satz 3.1.10 (Quotientenkriterium). *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe so dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq N$.*

1. *Falls*
$$q = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1,$$
so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

2. *Falls*
$$\liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1,$$
so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. 1. Es sei $p \in \mathbb{R}$ mit $q < p < 1$. Dann existiert $K \geq N$ mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq p < 1 \quad \text{für } k \geq K,$$

denn sonst gäbe es einen Häufungspunkt r von $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ mit $r \geq p$, ein Widerspruch zu Lemma 2.3.7, also dem lim sup als größten Häufungspunkt. Damit folgt aber

$$|a_k| \leq p|a_{k-1}| \leq p^2|a_{k-2}| \leq \cdots \leq p^{k-K}|a_K| = Cp^k$$

für $C = p^{-K}|a_K|$. Damit ist aber $\sum_{k=1}^{\infty} Cp^k$ eine Majorante und die Behauptung folgt mit Satz 3.1.9 und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

2. Es folgt mit einem ähnlichen Argument dass $|a_k| > |a_{k-1}| \geq \cdots \geq |a_K| > 0$ für ein geeignetes $K \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die zugehörige Reihe nach Satz 3.1.4 nicht konvergent.

$\square$

Beispiel. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$, $q \neq 0$. Für $\alpha \in \mathbb{N}$ setzen wir $a_k = k^\alpha q^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|(k+1)^\alpha q^{k+1}|}{|k^\alpha q^k|} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^\alpha |q| \to |q| \quad \text{für } k \to \infty.$$

Somit konvergiert die zugehörige Reihe absolut.

1. Das Quotientenkriterium angewandt auf die divergente harmonische Reihe ergibt $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$. Somit ist das Kriterium für Divergenz nur hinreichend, nicht notwendig.

2. Ebenso ergibt sich für $a_k = \frac{1}{k^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ (also konvergente zugehörige Reihe) ein Limes $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$. Auch für Konvergenz ist das Kriterium also nur hinreichend, aber nicht notwendig.

Satz 3.1.11 (Wurzelkriterium)**.** *Sei $\sum_{k=1}^\infty a_k$ eine Reihe.*

1. *Falls $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ so ist $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergent.*

2. *Falls $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ so ist $\sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent.*

Beweis. 1. Wir wählen $p \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < p < 1$. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq p$ für $k \geq K$ und somit $|a_k| \leq p^k$ für $k \geq K$. Wieder finden wir somit eine geometrische Reihe als Majorante für $\sum_{k=1}^\infty a_k$. Konvergenz folgt mit Satz 3.1.9 und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

2. Nach Voraussetzung finden wir unendlich viele Indizes mit $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, also auch $|a_k| \geq 1$, damit ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die zugehörige Reihe nach Satz 3.1.4 nicht konvergent.

$\square$

3.2 Umordnung und Produkt von Reihen

Satz 3.2.1 (Umordnungssatz)**.** *Sei $\sum_{k=1}^\infty a_k$ eine absolut konvergente Reihe und sei $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist auch die umgeordnete Reihe*

$$\sum_{k=1}^\infty a_{\phi(k)} = a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + a_{\phi(3)} + \ldots$$

absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^\infty a_{\phi(k)} = \sum_{k=1}^\infty a_k.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{m} |a_k| < \epsilon.$$

Wir setzen

$$K := \max\{j \in \mathbb{N} : \phi(j) \leq N\} \geq N$$

und es folgt $\phi(j) \geq N+1$ für alle $j \geq K+1$ und damit auch für alle $k, l \geq K+1$, $l > k$

$$\sum_{j=k+1}^{l} \left|a_{\phi(j)}\right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$ absolut. Es gilt weiterhin für alle $m > K$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_{\phi(k)}\right| \\
\leq &\left|\sum_{k=1}^{N} a_k - \sum_{k=1}^{K} a_{\phi(k)}\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{m} a_k\right| + \left|\sum_{k=K+1}^{m} a_{\phi(k)}\right| \leq 3 \sum_{k=N+1}^{m} |a_k| < 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$. □

Satz 3.2.2 (Cauchy-Produktsatz)**.** *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *absolut konvergente Reihen. Wir setzen* $d_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1}$*. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *absolut und es gilt*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Bemerkung. Wir schreiben in diesem Fall auch

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = \sum_{k,j=1}^{\infty} a_j b_k.$$

Achtung: Solche Doppelsummen ergeben nur bei absoluter Konvergenz Sinn, denn es gibt hier keine kanonische Reihenfolge der Summation.

Beweis von Satz 3.2.2. Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |d_i| &= \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{i} a_j b_{i-j+1}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} |a_j|\,|b_{i-j+1}| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_j|\,|b_k| = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right) =: A_n B_n.
\end{aligned}$$

Da $(A_n)_n$ gegen $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ und $(B_n)_n$ gegen $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ konvergieren, ist damit $(\sum_{k=1}^{n} |d_k|)_n$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Mit Satz 2.1.9 folgt, dass $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ absolut konvergiert. Wir betrachten jetzt zu $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left|\left(\sum_{j=1}^{2n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{2n} b_k\right) - \sum_{i=1}^{n} d_i\right| &\leq \left|\sum_{j,k=1}^{2n} |a_j||b_k| - \sum_{j,k=1}^{n} |a_j||b_k|\right| \\ &= |B_{2n}C_{2n} - B_nC_n| \,.\end{aligned}$$

Da $(A_n)_n$ und $(B_n)_n$ konvergent sind, strebt die rechte Seite mit $n \to \infty$ gegen Null. Mit Satz 2.1.5 und den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) - s = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{2n} b_j\right)\left(\sum_{k=1}^{2n} c_k\right) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$$

□

3.3 Die Exponentialreihe

Satz 3.3.1. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Exponentialreihe*

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

absolut.

Beweis. Wir setzen $a_k = \frac{1}{k!}x^k$ und rechenen

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k!\, x^{k+1}}{(k+1)!\, x^k}\right| = \frac{1}{k+1}|x| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit dem Quotientenkriterium (Satz 3.1.10) folgt absolute Konvergenz der Reihe. □

Satz 3.3.2 (Funktionalgleichung)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt* $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Beweis. Nachdem die Reihen $\exp x$ und $\exp y$ wie gerade bemerkt absolut konvergent sind folgt mit den Sätzen 1.4.8 und 3.2.2, dass

$$\begin{aligned}\exp(x)\cdot\exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}y^j\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}x^k\right)\frac{1}{(n-k)!}y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k}}_{=(x+y)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.3. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \textit{sowie} \quad \exp(x) > 0.$$

Beweis. Beides folgt direkt aus der Funktionalgleichung Satz 3.3.2. □

Satz 3.3.4. *Es gilt*

$$\exp(1) = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sowie

$$\exp(q \cdot x) = \exp(x)^q \quad \textit{für alle } q \in \mathbb{Q} \textit{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Übung. □

Bemerkung. Wir schreiben auch $\exp(q) = \mathrm{e}^q$ für $q \in \mathbb{Q}$.

Lemma 3.3.5. *Für $|x| \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\left|\exp x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k\right| \leq \frac{2}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Beweis. Mit Dreiecksungleichung und Satz 2.1.5 folgt

$$\begin{aligned}
\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |x|^k \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2}|x| + \frac{1}{n+2}\frac{1}{n+3}|x|^2 + \frac{1}{n+2}\frac{1}{n+3}\frac{1}{n+4}|x|^3 + \dots\right) \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{n+j+1}|x|\right) \\
&\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{(n+1)!} |x|^{n+1},
\end{aligned}$$

denn jeder der k Faktoren im Produkt ist kleiner als $\frac{1}{2}$. □

Kapitel 4

Funktionen und Stetigkeit

Im Folgenden bezeichnet D eine nicht leere Teilmenge der reellen Zahlen.

4.1 Reelle Funktionen

Definition 4.1.1. Eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir als reelle Funktion.

Bemerkung. Wir erinnern uns an Begriffe wie *Injektivität*, *Surjektivität*, *Graph*, *Bild*, *Hintereinanderschaltung* oder *Einschränkung* von Abbildungen.

Beispiel.

1. Die konstante Funktion zu $c \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$.
2. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_D\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.
3. Affin-lineare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
4. Die Quadratwurzelfunktion $\sqrt{\cdot}\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.
5. Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$.

Definition 4.1.2. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} &f + g, fg, \lambda f\colon D \to \mathbb{R} \\ &(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

sowie für $D' = \{x \in\colon g(x) \neq 0\}$

$$\frac{f}{g}\colon D' \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

4.2 Stetigkeit und Grenzwerte

Definition 4.2.1. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$ falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ die in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist heißt stetig.

Beispiel.

Affin-lineare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ für gegebene $a, b \in \mathbb{R}$ sind stetig.
In der Tat, die Wahl $\delta = \frac{\epsilon}{|a|+1}$ genügt der Definition.

Die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig.
Hier reicht es in der Definition $\delta = \epsilon$ zu wählen, denn $|x| - |y| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2.2. *Die Exponentialfunktion ist stetig.*

Beweis. Für $x_0 = 0$ gilt wegen Lemma 3.3.5, dass

$$|\exp x - 1| \leq 2|x| \quad \text{für } |x| < 1.$$

Zu $\epsilon > 0$ genügt hier also die Wahl $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2}\}$, so dass – da $\exp 0 = 1$

$$|\exp x - \exp 0| < 2\delta < \epsilon \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \delta$$

und somit ist die Exponentialfunktion stetig im Ursprung.
Für $x_0 \neq 0$ nutzen wir die Funktionalgleichung in Satz 3.3.2 und bekommen

$$|\exp x_0 - \exp x| = |\exp x_0| \left|1 - \frac{\exp x}{\exp x_0}\right| = |\exp x_0| \, |1 - \exp(x - x_0)| \, .$$

Sei $\epsilon > 0$. Da die Exponentialfunktion stetig im Ursprung ist, existiert $\delta > 0$, so dass

$$|1 - \exp(x - x_0)| < \frac{\epsilon}{|\exp x_0|} \quad \text{für } |x - x_0| < \delta.$$

Somit folgt auch $|\exp x_0 - \exp x| < \epsilon$ für $|x - x_0| < \delta$ und damit Stetigkeit der Exponentialfunktion in x_0. Dies gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und somit ist die Exponentialfunktion stetig. □

Definition 4.2.3. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $D \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ unendlich viele Elemente besitzt.

Lemma 4.2.4. *Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt der Menge D wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{x_0\}$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$.*

Beweis. Sei x_0 Häufungspunkt von D. Dann existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein

$$x_k \in \left(x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}\right) \cap D, x_k \neq x_0.$$

Für die so definierte Folge $(x_k)_k$ gilt $|x_k - x_0| < \frac{1}{k} \to 0$, also $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, wie verlangt.
Sei umgekehrt eine Folge $(x_k)_k$ in $D \setminus \{x_0\}$ gegeben mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$. Angenommen, für ein $\epsilon > 0$ ist die Menge $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap D$ endlich. Dann ist

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap D \setminus \{x_0\} = \{a_1, \ldots, a_m\} \qquad \text{für ein } m \in \mathbb{N}_0$$

und wir erhalten

$$\epsilon > \rho := \min_{1 \leq i \leq m} |a_i - x_0| > 0.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} |x_k - x_0| = 0$ folgt für k hinreichend groß

$$x_k \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \cap D \setminus \{x_0\} = \emptyset.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Definition 4.2.5. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 Häufungspunkt von D. Wir sagen die Funktion f konvergiert für x gegen x_0 gegen $a \in \mathbb{R}$ falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft dass

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta$$

und schreiben

$$f(x) \to a \quad \text{für } x \to x_0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Satz 4.2.6. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. $f(x) \to a$ *für* $x \to x_0$.
2. *Für alle Folgen* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in D \setminus \{x_0\}$, $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ *gilt* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Zu einer Folge wie in (2) existiert dann $N \in \mathbb{N}$, sodass $0 < |x_k - x_0| < \delta$ für alle $k \geq N$. Dies impliziert, dass $|f(x_k) - a| < \epsilon$ für alle $k \geq N$. Damit folgt 1.

$2 \Rightarrow 1$: Angenommen es gelte nicht $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in D \setminus \{x_0\}$ existiert mit

$$|x_0 - x_k| < \frac{1}{k} \quad \text{aber} \quad |f(x_k) - a| \geq \epsilon.$$

Damit konvergiert $(x_k)_k$ gegen x_0, aber $(f(x_k))_k$ nicht gegen a, ein Widerspruch.

□

Satz 4.2.7. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. f *ist stetig in* x_0.
2. $f(x) \to f(x_0)$ *für* $x \to x_0$.
3. *Für alle Folgen* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in D$, $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ *gilt* $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$.

Beweis. $1 \Leftrightarrow 2$: Dies folgt aus den Definitionen, da $|f(x) - f(x_0)| = 0$ für $x = x_0$.

$2 \Leftrightarrow 3$: Dies folgt mit Satz 4.2.6 zunächst für alle Folgen in $D \setminus \{x_0\}$, dann aber auch für alle Folgen in D.

□

Satz 4.2.8. *Seien* $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ *reelle Funktionen und* x_0 *ein Häufungspunkt von* D. *Es gelte* $f(x) \to a$ *und* $g(x) \to b$ *für* $x \to x_0$. *Dann gilt für* $x \to x_0$

$$f(x) + g(x) \to a + b, \quad f(x)g(x) \to ab.$$

und (falls $b \neq 0$*)* $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{a}{b}$.
Falls f *und* g *stetig im Punkt* $x_0 \in D$ *sind, dann sind auch die Funktionen* $f + g$ *sowie* fg *stetig im Punkt* x_0. *Falls* $g(x_0) \neq 0$ *dann ist auch* $\frac{f}{g}$ *stetig im Punkt* x_0.

Beweis. Dies folgt unter Betrachtung von Satz 4.2.7 und den Rechenregeln für konvergente Folgen. □

Satz 4.2.9. *Seien $f: D \to \mathbb{R}, g: E \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $f(D) \subset E$. Falls f stetig ist in $x_0 \in D$ und g stetig ist in $y_0 = f(x_0) \in E$, so ist $g \circ f: \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, so dass $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Aus der Stetigkeit von f in x_0 folgt nun $y_n = f(x_n) \to y_0 = f(x_0)$ für $n \to \infty$. Aufgrund der Stetigkeit von g in y_0 schließen wir, dass $g(y_n) = g(f(x_n) \to g(y_0) = g(f(x_0))$ für $x_n \to x_0$ und die Stetigkeit ist gezeigt. □

Beispiel. Polynome sind stetig. Rationale Funktionen sind stetig außerhalb der Nullstellen ihrer Nenner.

Definition 4.2.10. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

1. Sei x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann schreiben wir
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$
falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert mit $f(x) > M$ für alle $x \in$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

2. Sei D nicht nach oben beschränkt und $a \in \mathbb{R}$. Falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle $x \in$ mit $x > k$, so schreiben wir
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

Analog definieren wir die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ sowie $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

4.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 4.3.1 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $f(a) \le y_0 \le f(b)$ oder $f(b) \le y_0 \le f(a)$ (also y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$). Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y_0$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $f(a) < y_0 < f(b)$, die anderen Fälle folgen analog, bzw. sind trivial, falls $f(a) = y_0$ oder $f(b) = y_0$. Da die Menge $M = \{x \in [a,b] : f(x) \le y_0\}$ nicht leer und beschränkt ist setzen wir $x_0 = \sup M$. Wir behaupten, dass $f(x_0) = y_0$.
Schritt 1: Wir zeigen, dass $a < x_0 < b$. In der Tat existiert wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $f(x) < y_0$ für $x \in [a, a+\delta)$ und $f(x) > y_0$ für $x \in (b-\delta, b]$.
Schritt 2: Nach der Wahl von x_0 als kleinste obere Schranke existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $x_0 - \frac{1}{k} < x_k \le x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da f stetig ist folgt
$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) \le y_0.$$
Schritt 3: Nachdem $x_0 < b$ nach Schritt 1, folgt, dass für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$ gilt $x_0 + \frac{1}{k} \le b$. Da x_0 eine obere Schranke von M ist, erhalten wir $x_0 + \frac{1}{k} \notin M$, also $f(x_0 + \frac{1}{k}) > y_0$. Mit der Stetigkeit von f bekommen wir
$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_0 + \frac{1}{k}) \ge y_0.$$
Zusammen mit Schritt 2 ergibt sich die Behauptung. □

Folgerung 4.3.2. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(a)f(b) < 0$. Dann existiert eine Nullstelle von f im offenen Intervall (a,b).*

Beweis. Da $f(a)f(b) < 0$ liegt $y_0 = 0$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und weder a noch b sind Nullstellen von f. Die Behauptung folgt mit Satz 4.3.1. □

Proposition 4.3.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (möglicherweise uneigentliches, d.h. mit Grenzen $\pm\infty$) Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall (möglicherweise uneigentlich, oder nur aus einem Punkt bestehend).*

Beweis. Wir setzen $\alpha = \inf f(I)$, $\beta = \sup f(I)$. Sei nun $y \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < y < \beta$. Nach Satz 1.5.11 existieren $x_0, x_1 \in I$ mit $f(x_1) < y < f(x_2)$. Der Zwischenwertsatz, Satz 4.3.1 garantiert nun Existenz von $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = y$. Somit folgt $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Für $y > \beta$ oder $y < \alpha$ folgt andererseits aus der Definition des Supremums und des Infimums, dass $y \notin f(I)$. Somit ist $f(I)$ ein Intervall. □

Bemerkung. Es kann durchaus vorkommen, dass eigentliche Intervalle auf uneigentliche Intervalle abgebildet werden, so gilt für $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, dass $f((0,1]) = [1,\infty)$.

Definition 4.3.4. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn ihre Bildmenge beschränkt ist. Analog definieren wir nach oben bzw. nach unten beschränkte Funktionen.

Satz 4.3.5. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$. Dann nimmt f auf $[a,b]$ ihr Maximum und Minimum an, i.e., es existieren x_+ und x_-, so dass*

$$\begin{aligned} f(x_+) &= \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \quad \textit{und} \\ f(x_-) &= \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen den Satz für das Minimum, für das Maximum folgt der Beweis analog. Dazu betrachten wir eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$, so dass $f(x_k) \to \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, genannt Minimalfolge. Eine solche Folge existiert wie immer aufgrund der Definition des Infimums. Die Minimalfolge ist beschränkt und somit existiert dank des Satzes von Bolzano und Weierstraß, Satz 2.3.8, eine konvergente Teilfolge $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes x_-. Nachdem $x_k \in [a,b]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt dies auch für x_-. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt

$$\inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = \lim_{n\to\infty} f(x_{k(n)}) = f(x_-).$$

Somit ist x_- die gesuchte Minimalstelle. □

Folgerung 4.3.6. *Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sind beschränkt.*

Beweis. Dies folgt nach Betrachtung des Beweises von Satz 4.3.5, denn $\mathbb{R} \ni f(x_-) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und ebenso $\mathbb{R} \ni f(x_+) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. □

Definition 4.3.7. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f gleichmäßig stetig falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ min $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, dass gleichmäßig stetige Funktionen stetig sind.

Beispiel. Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Satz 4.3.8. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Beweis. Angenommen f sei nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, sodass für alle $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, Punkte $x_k, y_k \in [a,b]$ existieren mit

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k}, \quad \text{aber} \quad |f(x_k) - f(y_k)| \geq \epsilon.$$

Dann sind $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $[a,b]$ und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $\left(x_{k(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x_{k(j)} \to x$ $(j \to \infty)$. Da $a \leq x_{k(j)} \leq b$ für alle $j \in \mathbb{N}$, folgt $x \in [a,b]$. Dann gilt aber auch $y_{k(j)} \to x$ für $j \to \infty$, denn

$$\left|y_{k(j)} - x\right| \leq \left|y_{k(j)} - x_{k(j)}\right| + \left|x_{k(j)} - x\right| \to 0 \quad (j \to \infty).$$

Da f stetig ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} 0 = |f(x) - f(x)| &= \left|\lim_{j\to\infty} f\left(x_{k(j)}\right) - \lim_{j\to\infty} f\left(y_{k(j)}\right)\right| \\ &= \lim_{j\to\infty} \left|f\left(x_{k(j)}\right) - f\left(y_{k(j)}\right)\right| \geq \epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch zu $\epsilon > 0$. □

Definition 4.3.9. Ein (reelle) Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Menge der Funktionen von D in die reellen Zahlen. Wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ falls für jeden Punkt $x \in D$ gilt $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und schreiben in diesem Fall

$$f_n \to f \quad \text{punktweise für } n \to \infty.$$

Beispiel. Ein Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Dann gilt

$$f_n \to f$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Insbesondere sehen wir, dass der punktweise Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen nicht notwendigerweise stetig ist.

Definition 4.3.10. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$, und schreiben

$$f_n \to f \quad \text{gleichmäßig für } n \to \infty.$$

wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in D.$$

Satz 4.3.11. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, $f_n \to f$ gleichmäßig für $n \to \infty$. Dann ist f ebenfalls stetig.*

Beweis. Sei x_0 ein Punkt im Definitionsgebiet D der Funktionen, $\epsilon > 0$. Es existiert dann $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$. Weiters sei $\delta > 0$, so dass $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ für $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$. Damit folgt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

für $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$. □

Definition 4.3.12. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt

1. monoton wachsend, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$,
2. streng monoton wachsend, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$,
3. monoton fallend, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$,
4. streng monoton wachsend, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$,
5. monoton, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist,
6. streng monoton, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Satz 4.3.13. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem (gegebenenfalls uneigentlichen) Intervall I mit Intervallgrenzen $a < b$. Sei f stetig und streng monoton wachsend. Dann gilt*

1. *$J = f(I)$ ist ein (gegebenenfalls uneigentliches) Intervall mit Intervallgrenzen $\alpha = \inf f(I)$ und $\beta = \sup f(I)$.*
2. *$\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$ und $\beta = \lim_{x \to b} f(x)$, und $\alpha \in J$ genau dann wenn $a \in I$ sowie $\beta \in J$ genau dann wenn $b \in I$.*
3. *Die Funktion $f\colon I \to J$ ist bijektiv.*
4. *Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ ist stetig und streng monoton wachsend.*

Beweis. Dass J ein Intervall ist wurde in Proposition 4.3.3 gezeigt. Aus strikter Monotonität folgt Injektivität und somit Bijektivität von $f\colon I \to J$. Punt 2 Folgt ebenfalls aus der strikten Monotonität.
Es bleibt die Stetigkeit von $f^{-1}\colon J \to I$ zu zeigen. Sei also $y_0 = f(x_0) \in J$, $x_0 \in I$. Wir betrachten zunächst den Fall $a < x_0 < b$. Dann existiert $\varepsilon_0 > 0$, sodass

$$I_\varepsilon := [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I \text{ für alle } \epsilon < \epsilon_0.$$

Setze $c := f(x_0 - \epsilon), d := f(x_0 + \epsilon)$. Da f streng monoton wächst, ist $f : I_\epsilon \to [c, d]$ bijektiv. Wähle dann $\delta := \min\{y_0 - c, d - y_0\}$. Dann gilt für alle $y \in J$ mit $|y_0 - y| < \delta$, dass $y \in (c, d)$, und damit $f^{-1}(y) \in I_\epsilon$. Insbesondere folgt also $\left|f^{-1}(y) - x_0\right| < \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies, dass f^{-1} stetig in y_0 ist. Falls $x_0 = a$ so können wir ähnlich für $I_\epsilon = [x_0, x_0 + \epsilon]$ argumentieren, wir wählen dann $\delta := f(x_0 + \epsilon) - f(x_0), \epsilon > 0$ hinreichend klein. Der Fall $x_0 = b$ folgt ebenso. □

4.4 Der Logarithmus und allgemeine Potenzen

Satz 4.4.1. *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *ist bijektiv, streng monoton wachsend und stetig. Es gilt*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Damit definieren wir die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion

$$\ln = \exp^{-1}, \quad \ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}.$$

Die Logarithmusfunktion ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv und es gilt

$$\lim_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty, \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(\mathrm{e}) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Weiters gilt die Funktionalgleichung des Logarithmus

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad \textit{für alle } x, y > 0.$$

Bemerkung. Mit $\lim_{x\searrow 0} f(x)$ bezeichnen wir den Grenzwert $f(x_k)$, wobei $x_k \to 0$ mit $x_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis von Satz 4.4.1. Die Eigenschaften der Exponentialfunkton folgen aus $\exp x > 1 + x$ für $x > 0$, was aus ihrer Definition ersichtlich ist. Direkt folgt

$$\lim_{x\to\infty} \exp x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\exp x} = 0.$$

Strenge Monotonität folgt da für $\xi > 0$ gilt $\exp \xi > 1$ und somit

$$\exp(x+\xi) = \exp(x)\exp(\xi) > \exp(x).$$

Weiters ist die Exponentialfunktion nach Satz 4.2.2 stetig.
Nach Satz 4.3.13 ist die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ also bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\exp^{-1}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R} = \ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

ebenfalls stetig. Wir nennen diese Umkehrfunktion $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die (natürliche) Logarithmusfunktion. Die weiteren Eigenschafen der Logarithmusfunktion folgen ebenfalls aus Satz 4.3.13, die Funktionalgleichung durch

$$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = xy \quad \text{also} \quad \ln x + \ln y = \ln xy.$$

$\square$

Definition 4.4.2. Sei $a > 0$. Die Funktion

$$\exp_a\colon \mathbb{R} \to (0,\infty), \quad \exp_a(x) = a^x = \exp(x \log a) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

heißt allgemeine Exponentialfunktion (oder Potenzfunktion) zur Basis a.

Satz 4.4.3. *Für alle* $a > 0$ *ist* $\exp_a\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *stetig. Weiters gilt für alle* $a, b > 0$ *und alle* $x, y \in \mathbb{R}$

1. $a^x a^y = a^{x+y}$,
2. $(a^x)^y = a^{xy}$,
3. $a^x b^x = (ab)^x$,
4. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

Die Funktion $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, ist für $a > 1$ streng monoton steigend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend. Die Funktion $a \mapsto a^x$, $a > 0$, ist für $x > 0$ streng monoton steigend und für $x < 0$ streng monoton fallend.

Beweis. Die Behauptungen folgen durch einfache Rechnung unter Verwendung der Funktionalgleichungen der Exponentialfunktion bzw. des Logarithmus, so gilt z.B.

$$(a^x)^y = (\exp(x \ln a))^y = \exp(y \ln(\exp(x \ln a))) = \exp(yx \ln a) = a^{xy}.$$

$\square$

Bemerkung. Die Definition von a^r stimmt im Fall $r = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ mit der alten Definition als eindeutige positive Lösung y der Gleichung $y^q = a^p$ überein. Dies lässt sich ebenfalls durch eine kurze Rechnung überprüfen.

Kapitel 5

Die komplexen Zahlen

5.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition 5.1.1. Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir zwei Verknüpfungen, eine Addition $+\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und eine komplexe Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.1.2. *Die Menge $\mathbb{R}^2$, bildet mit den in Definition 5.1.1 definierten Verknüpfungen einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.*

Beweis. Die Gültigkeit der Körperaxiome lässt sich leicht nachprüfen. $\square$

Bemerkung.

1. Das neutrale Element der Addition in $\mathbb{C}$ ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, das neutrale Element der Multiplikation ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Das inverse Element zu $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich der Addition in $\mathbb{C}$ ist $\left(\begin{smallmatrix} -a \\ b \end{smallmatrix}\right)$, bezüglich der Multiplikation (für $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$) ist das entsprechende inverse Element $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$.

2. Es ist nicht möglich eine Ordnung auf $\mathbb{C}$ zu definieren, welche die Eigenschaften der Ordnung auf $\mathbb{R}$ erfüllt.

3. Wir identifizieren $x \in \mathbb{R}$ mit der komplexen Zahl $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und betrachten somit $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$. Diese Einbettung ist kompatibel mit den Körperaxiomen, insbesondere sind (komplexe) Verknüpfungen zweier reeller Zahlen wieder reell. Die reelle Zahl 1 ist identifiziert mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}$.

4. Die komplexe Zahl $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ definieren wir als sogenannte imaginäre Einheit i, also $\mathrm{i} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es folgt aus den Regeln zur komplexen Multiplikation dass $\mathrm{i}^2 = -1$.

5. Jede komplexe Zahl kann nun in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Die komplexen Verknüpfungen folgen nun mit den üblichen Rechenregeln durch Ausmultiplizieren, insbesondere sehen wir

$$(a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) = ac + a\mathrm{i}d + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd = ab - bd + \mathrm{i}(ad + bc).$$

6. Der Realteil einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist $\operatorname{Re} z = x$,

7. $\mathbb{R}^2$ als Veranschaulichung von $\mathbb{C}$ wird auch als Gauß'sche Zahlenebene bezeichnet.

Definition 5.1.3. 1. Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ ist gegeben durch

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y \quad \text{für } z = x + \mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Die Norm $|\cdot|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = x + \mathrm{i}y,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Proposition 5.1.4. *Es gilt*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$,
2. $z\overline{z} = |z|^2$, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, $|\overline{z}| = |z|$.

Beweis. Folgt durch Nachrechnen, so gilt zum Beispiel für $z = x + \mathrm{i}y$, dass

$$z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

□

Proposition 5.1.5. *Die Norm auf $\mathbb{C}$ erfüllt die Eigenschaften*

Positiv Definitheit: $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$,

Homogenität: $|zw| = |z||w|$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$,

Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Beweis. Positiv Definitheit und Homogenität folgen direkt aus der Definition. Zur Dreiecksungleichung rechnen wir mit Proposition 5.1.4

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)\overline{(a+b)} = |a|^2 + a\overline{b} + \overline{a}b + |b|^2 \\ &= |a|^2 + 2\operatorname{Re}(a\overline{b}) + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2. \end{aligned}$$

□

5.2 Komplexe Folgen und Reihen

Analog zu reellen Folgen betrachten wir komplexe Folgen, also Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Definition 5.2.1. Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$ falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|z_n - z| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Satz 5.2.2. *Sei $(z_n)_n \in \mathbb{N}$ eine Folge komplexer Zahlen, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent*

1. *$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent,*

2. *Sowohl* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *als auch* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent,*

3. $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent.*

Beweis. Die folgt durch direktes Einsetzen der jeweiligen Aussagen unter Verwendung der Defintion der Norm auf $\mathbb{C}$. $\square$

Definition 5.2.3. Eine Folge $(z_n)_n \in \mathbb{N}$ heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|z_n - z_m| < \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Bemerkung. Alle Eigenschaften der Konvergenz (abgesehen von den Ungleichungen) übertragen sich nun auf die Konvergenz komplexer Folgen. Es seien hier insbesondere die Rechenregeln sowie das Cauchy-Kriterium der Konvergenz und die Satz von Bolzano und Weierstraß erwähnt.

Definition 5.2.4. Sei $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir betrachten die Folge $(s_n)_n \in \mathbb{N}$ der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge $(s_n)_n \in \mathbb{N}$ nennen wir (unendliche) komplexe Reihe und schreiben dafür auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Eine komplexe Reihe heißt konvergent, falls die zugehörige Folge der Partialsummen konvergiert. Eine komplexe Reihe heißt absolut konvergent, falls die (reelle) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bemerkung. Auch die Eigenschaften der Reihen übertragen sich nun ins komplexe, genannt seien hier insbesondere das Majorantenkriterium, das Quotientenkriterium, das Wurzelkriterium sowie der Umordnungs- und der Cauchy-Produktsatz. Der Absolutbetrag wird hier jeweils durch die komplexe Norm ersetzt.

5.3 Komplexe Exponentialfunktion und Trigonometrische Funktionen

Analog zu den reellen Funktionen definieren wir komplexe Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}$.

Definition 5.3.1. Eine komplexe Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt stetig im Punkt $z_0 \in D$ falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Analog zum reellen definieren wir auch gleichmäßige Stetigkeit.

Bemerkung. Die Rechenregeln zu stetigen Funktionen sowie die Stetigkeit von Hintereinanderschaltungen übertragen sich ebenfalls ins Komplexe. Auch sind stetige komplexe Funktionen auf Produkten abgeschlossener Intervalle (also $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig – hier ist es aber durchaus nützlich auch allgemeinere Arten von Definitionsgebieten mit dieser Eigenschaft, sogenannte abgeschlossene Mengen, zu betrachten.

Satz 5.3.2. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die komplexe Exponentialreihe*

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

absolut. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$$

und für alle $|z| \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \right| \leq \frac{2}{(n+1)!} |z|^{n+1}.$$

Weiters ist die komplexe Exponentialfunktion stetig.

Beweis. Folgt analog zum reellen Fall. □

Wir rechnen für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{\exp(\mathrm{i}x)} &= \lim_{n\to+\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (\mathrm{i}x)^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \overline{(\mathrm{i}x)^k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \overline{(\mathrm{i}x)}^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (-\mathrm{i}x)^k = \exp(-\mathrm{i}x) \end{aligned}$$

und erhalten $|\exp(\mathrm{i}x)|^2 = 1$. Damit liegt $\exp(\mathrm{i}x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis.

Definition 5.3.3. Wir definieren die Funktionen Sinus und Kosinus, $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cos x = \operatorname{Re}\exp(\mathrm{i}x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \operatorname{Im}\exp(\mathrm{i}x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

Satz 5.3.4. *Sinus und Cosinus sind stetige Funktionen.*

Beweis. Die Funktionen sind gegeben als Verknüpfungen stetiger Funktionen. □

Bemerkung. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos(x)$, der Sinus ist also eine sogenannte gerade Funktion, der Kosinus eine ungerade Funktion. Weiters gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Satz 5.3.5. *Es gelten die Additionstheoreme des Sinus und des Kosinus, also für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x + y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen unter Benutzung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}(x + y))) = \operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}x)\exp(\mathrm{i}y)) \\ &= \operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}x))\operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}y)) - \operatorname{Im}(\exp(\mathrm{i}x))\operatorname{Im}(\exp(\mathrm{i}y)) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Analog gestaltet sich die Rechnung für den Sinus. □

Folgerung 5.3.6. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Beweis. Übung. □

Satz 5.3.7. *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und beide Reihen konvergieren absolut.

Beweis. Absolute Konvergenz folgt direkt mit dem Majorantenkriterium unter Vergleich mit der Exponentialreihe. Nachdem für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$i^{2k} = (-1)^k \quad \text{und} \quad i^{2k+1} = (-1)^k i$$

folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{i}x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(\mathrm{i}x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $N \to \infty$ ergibt

$$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\left[\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$$

und damit die Behauptung. □

Proposition 5.3.8. *Es gilt* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis. Wir schreiben

$$\exp \mathrm{i}x - (1 + \mathrm{i}x) = \cos x - 1 + \mathrm{i}(\sin x - x)$$

und erhalten mit (der komplexen Version von) Lemma 3.3.5 in Satz 5.3.2, dass

$$|\sin x - x| \leq |\exp \mathrm{i}x - (1 + \mathrm{i}x)| \leq 2\frac{1}{2}|\mathrm{i}x|^2 = |x|^2,$$

und somit für $|x| \leq 1$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|\frac{\sin x - x}{x}\right| \leq |x| \to 0 \quad \text{für } x \to 0.$$

□

Lemma 5.3.9. *Für* $x \in (0,2]$ *gilt*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$
$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x.$$

Insbesondere gilt $\sin x > 0$ *auf* $(0,2]$ *und* $\cos 2 < 0$.

Beweis. Die Reihen des Sinus und Cosinus sind alternierend (d.h., die Vorzeichen der jeweiligen Summanden wechseln sich ab). Die Abschätzungen folgen mit einem Teleskopsummenargument analog zum Beweis von Satz 3.1.6. □

Satz 5.3.10. *Der Cosinus hat im Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle* t_0.

Beweis. Es gilt $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 < 0$ nach Lemma 5.3.9. Mit Folgerung 5.3.6 erhalten wir

$$\cos y - \cos x = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} < 0 \quad \text{für } 0 \leq x < y \leq 2,$$

da $\sin x > 0$ auf für $x \in [0,2]$ nach Lemma 5.3.9. Damit ist der Cosinus auf dem $[0,2]$ strikt monoton fallend und es existiert genau eine Nullstelle. □

Bemerkung. Wir setzen $\pi = 2t_0$.

Satz 5.3.11. *Es gilt* $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$. *Sinus und Kosinus nehmen die folgenden speziellen Werte an:*

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Weiters gilt $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *und* $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Aus $\sin^2 x + \cos^x = 1$ folgt $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$, und wegen Positivität des Sinus bei $\frac{\pi}{2}$, dass $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Somit gilt auch $\exp \frac{i\pi}{2} = i$. Der Rest folgt durch Einsetzen in die Additionstheoreme. □

Kapitel 6

Differenzierbarkeit

6.1 Ableitung

Definition 6.1.1. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ Häufungspunkt. Dann heißt f differenzierbar in x_0 falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Der Wert $f'(x_0)$ heißt dann Ableitung von f im Punkt x_0. Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall definieren wir die Ableitungsfunktion $f'\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$.

Bemerkung.

1. Üblicherweise ist $D = I$ ein Intervall, welches nicht nur einen Punkt enthält. In diesem Fall ist auch jeder Punkt in I ein Häufungspunkt.
2. Wir schreiben auch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)$ für $f'(x_0)$.
3. Die Ableitung ist ein Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, welcher die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ angibt.

Beispiel.

1. Affin-lineare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ sind differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies ergibt sich sofort durch Einsetzen in den Differenzenqotienten.
2. Die Betragsfunktion ist im Ursprung nicht differenzierbar, denn $\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \pm 1$, je nachdem ob $x > 0$ oder $x < 0$. Beispielsweise für $x_k = \frac{(-1)^k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ mir $x_k \to 0$ für $k \to \infty$ existiert also der Grenzwert der Differenzenquotienten nicht.

Proposition 6.1.2. *Die reelle Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar mit Ableitung* $\exp' = \exp$.

Beweis. Sei zunächst $x_0 = 0$. Mit Lemma 3.3.5 erhalten wir

$$|\exp x - (1 + x)| \leq |x|^2 \quad \text{für } |x| \leq 1,$$

also

$$\left|\frac{\exp x - \exp 0}{x - 0} - \exp 0\right| = \left|\frac{\exp x - 1}{x - 1} - 1\right| = \left|\frac{\exp x - (1 + x)}{x}\right| \leq |x| \to 0 \quad \text{für } |x| \to 0.$$

Damit ist die Aussage für $x_0 = 0$ gezeigt. Für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ rechnen wir mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\exp x - \exp x_0}{x - x_0} = \exp x_0 \lim_{x \to x_0} \frac{\exp(x - x_0) - 1}{x - x_0} = \exp x_0 \lim_{h \to h} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x_0.$$

□

Proposition 6.1.3. *Die trigonometrischen Funktionen* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind differenzierbar mit* $\cos' = -\sin$ *und* $\sin' = \cos$.

Beweis. Übung. □

Lemma 6.1.4. *Sei* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *differenzierbar im Punkt* $x_0 \in D$. *Dann ist* f *stetig in* x_0.

Beweis. Wir rechnen

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

und die Behauptung folgt mit Satz 4.2.7. □

Bemerkung. Die Umkehrung von 6.1.4 gilt nicht. Die Betragsfunktion ist im Ursprung stetig aber nicht differenzierbar.

Satz 6.1.5. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Dann sind äquivalent*

1. f *ist in* $x_0 \in I$ *differenzierbar.*
2. *Es existieren* $m \in \mathbb{R}$ *und* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x) \quad \text{für alle } x \in D,$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0.$$

Falls 1. und 2. gelten, so ist $m = f'(x_0)$.

Beweis. Zunächst sei f in $x_0 \in I$ differenzierbar. Für $x \in I$ ist offensichtlich

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x) \quad \text{für } \varphi(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0).$$

Setzen wir $m = f'(x_0)$, so folgt durch Differenzierbarkeit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0.$$

Andererseits folgt aus Aussage 2, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(m + \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \right) = m,$$

und somit ist f differenzierbar in x_0 mit Ableitung m. □

Satz 6.1.6. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall mit mehr als einem Punkt und sei* $x_0 \in I$. *Seien* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in I$ *und seien* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

1. Linearität $\lambda f+\mu g\colon I\to\mathbb{R}$ *ist differenzierbar in* x_0 *mit* $(\lambda f+\mu g)'(x_0)=\lambda f'(x_0)+\mu g'(x_0)$,
2. Produktregel $fg\colon I\to\mathbb{R}$ *ist differenzierbar in* x_0 *mit* $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$,
3. Quotientenregel *Falls* $x(x_0)\neq 0$ *so gilt zudem* $\frac{f}{g}\colon I\to\mathbb{R}$ *ist differenzierbar in* x_0 *mit* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Beweis. 1. Folgt direkt aus den Rechenregeln für Funktionenlimiten.

2. Wir rechnen
$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0},$$
also folgt
$$\begin{aligned}f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0},\end{aligned}$$
wobei die Stetigkeit von g in x_0, welche aus Differenzierbarkeit folgt, sowie die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte benutzt wurden.

3. Es genügt, die Formel für f konstant gleich 1 zu zeigen, der Rest folgt mit der Produktregel. Wir rechnen
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\\&=\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\&=-\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0).\end{aligned}$$

□

Beispiel. 1. Für $k\in\mathbb{N}_0$ sei $f_k\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, für $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0$ sei $f_k\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ mit $f_k(x)=x^k$. Dann ist f differenzierbar auf dem jeweiligen Definitionsgebiet mit $f_k'(x)=kx^{k-1}$ falls $k\neq 0$ und $f_0'(x)=0$.

2. Die Tangensfunktion $\tan\colon\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ und die Kotangensfunktion $\cot\colon\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ sind differenzierbar mit
$$\tan' x=\frac{1}{\cos^2 x}\qquad \cot' x=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Satz 6.1.7 (Kettenregel)**.** *Seien I,E Intervalle (mit mehr als einem Punkt), $f\colon I\to\mathbb{R}$, $f(I)\subset E$, $g\colon E\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$. Falls f in $x_0\in I$ und g in $y_0=f(x_0)\in E$ differenzierbar sind, so ist $g\circ f\colon I\to\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Beweis. Für $x \in I$, $x \neq x_0$ und falls $f(x) \neq f(x_0)$ so gilt

$$\begin{aligned}\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$g^*\colon E \to \mathbb{R} g^*(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y \neq y_0, \\ g'(y_0) & \text{für } y \neq y_0. \end{cases}$$

Differenzierbarkeit von g impliziert die Stetigkeit von g^* im Punkt y_0. Somit ist auch nach Satz 4.2.9 auch $g^* \circ f$ stetig in x_0. Mit der obigen Rechnung erhalten wir

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = (g^* \circ f)(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{x \to x_0}{\to} g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

□

Beispiel. Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \cos(x^2)$ ist differenzierbar mit Ableitung $h'(x) = -2x \sin(x^2)$.

Satz 6.1.8. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intevall mit mehr als einem Punkt, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend und sei $g = f^{-1}\colon J \to I$ mit $J = f(I)$ die Umkehrfunktion von f. Falls f im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist mit Ableitung $f'(x_0) \neq 0$, so ist g im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit Ableitung*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Wir wissen bereits durch Satz 4.3.13, dass g streng monoton und stetig ist. Für $y \in J$, $y \neq y_0$ rechnen wir

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}}.$$

Der Nenner konvergiert aufgrund der Differenzierbarkeit von f in $x_0 = g(y_0)$ und der Stetigkeit von g in y_0 gegen $f'(x_0)$. Da $f'(x_0) \neq 0$ nach Voraussetzung folgt mit Satz 4.2.8

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Beispiel.

1. Die Logarithmusfunktion $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $f_r\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_r(x) = x^r = \exp(r \ln x)$. Dann ist f_r differenzierbar mit $f_r'(x) = r x^{r-1}$. Dies stimmt überein mit dem Spezialfall $r = k \in \mathbb{Z}$.

Definition 6.1.9. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitungsfunktion $f'\colon I \to \mathbb{R}$, I ein geeignetes Intervall, $x_0 \in I$. Falls der Grenzwert

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

existiert, so ist f in x_0 zweimal differenzierbar mit zweiter Ableitung $f''(x_0)$. Induktiv definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die k-te Ableitung von f und bezeichnen diese in x_0 mit $f^{(k)}(x_0)$.
Die Menge der Funktionen auf einem Intervall I, deren k-te Ableitung stetig ist, bezeichnen wir mit $C^k(I)$, wobei $C^0(I) = C(I)$ die stetigen Funktionen sind. Diese Mengen bilden jeweils einen Vektorraum.

6.2 Anwendungen der Ableitung

Definition 6.2.1. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, hat in $x_0 \in D$

1. ein (globales) Minimum, falls für alle $x \in D$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$.
2. ein lokales Minimum, falls $\epsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$.
3. ein striktes lokales Minimum, falls $\epsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ gilt $f(x) < f(x_0)$.

Bemerkung. 1. Globale, lokale und strikte lokale Maxima werden analog definiert.

2. Minima und Maxima nennen wir auch Extrema.

Bemerkung. Wir definieren auch einseitige Grenzwerte, beispielsweise $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to \mathbf{x_0}} f|_{D \cap (-\infty, x_0)} f(x)$. So gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x \searrow x_0} \operatorname{sgn}(x) = +1.$$

Eine Funktion besitzt einen Limes im Punkt x_0 wenn rechtsseitiger und linksseitiger Limes existieren und diese übereinstimmen.

Satz 6.2.2. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$ kein Randpunkt. Falls $f\colon I \to \mathbb{R}$ in x_0 ein lokales Extremum besitzt und in f in x_0 differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Angenommen f besitzt in x_0 ein lokales Minimum – für ein Maximum verläuft die Rechnung analog. Somit existiert $\epsilon > 0$, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \epsilon$. Mit der Differenzierbarkeit von f in x_0, und da x_0 kein Randpunkt des Intervalls ist folgt

$$0 \geq \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Somit folgt $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkung. 1. Für Extrema an Randpunkten muss die Ableitung dort nicht Null sein, siehe z.B. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

2. Das Verschwinden der Ableitung ist nur eine notwendige Bedingung, keine hinreichende, siehe z.B. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

3. Differenzierbarkeit ist keine notwendige Bedignung für ein Minimum, siehe z.B. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Definition 6.2.3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ kein Randpunkt und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0. Falls $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 kritischer oder stationärer Punkt von f. Ein stationärer Punkt der kein Extremum ist heißt Sattelpunkt.

Satz 6.2.4 (Satz von Rolle)**.** *Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Falls $f(a) = f(b)$, so existiert $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Nach Satz 4.3.5 nimmt f auf $[a,b]$ ihr Minimum und Maximum an. Falls nun

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(a) = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

so ist f konstant und $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in [a,b]$.
Gilt andererseits $\min_{x\in[a,b]} f(x) < f(a)$, so existiert eine Minimalstelle $x_0 \in (a,b)$ und mit Satz 6.2.2 gilt $f'(x_0) = 0$. Analog argumentieren wir falls $\max x \in [a,b] f(x) > f(a)$. □

Satz 6.2.5 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann existiert $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch Anwendung des Satzes von Rolle, Satz 6.2.4 auf

$$h\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

□

Proposition 6.2.6. *Sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b).*

1. *$f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt genau dann, wenn f konstant ist.*
2. *$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt genau dann, wenn f monoton wachsend ist.*
3. *Aus $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ folgt, dass f strikt monoton wachsend ist.*

Bemerkung. 1. Analog für fallende Funktionen.

2. Die Rückrichtung in (3) ist im Allgemeinen falsch, siehe z.B. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

Beweis von Proposition 6.2.6. 1. Für konstante Funktionen f ist bereits bekannt, dass die Ableitung Null ist. Seien also $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$. Wäre nun $f(x_1) \neq f(x_2)$, so ist auch $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = c \neq 0$. Mit dem Mittelwertsatz (Satz 6.2.5)folgt Existenz von $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = c \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Angenommen f ist nicht monoton wachsend. Dann existieren x_1, x_2 mit $x_2 > x_1$ so dass $f(x_1) > f(x_2)$ und somit $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = c < 0$. Dies ergibt wieder einen Widerspruch zum Mittelwertsatz. Falls f aber monoton wachsend ist, so ergibt sich die Aussage $f'(x) \geq 0$ aus der nicht-negativität der Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0}$ für $x > x_0$.

3. Angenommen, f ist nicht strikt monoton wachsend. Dann existieren x_1, x_2 mit $x_2 > x_1$ so dass $f(x_1) \geq f(x_2)$ und somit $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = c \leq 0$. Wir bekommen auch hier einen Widerspruch zum Mittelwertsatz.

$\square$

Satz 6.2.7. *Seien $a < b$, $x_0 \in (a,b)$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig.*

1. Sei f differnzierbar auf $(a, x_0) \cup (x_0, b)$. Falls $\epsilon > 0$ existiert mit

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \quad \textit{für } x \in (x_0 - \epsilon, x_0) \\ f'(x) &> 0 \quad \textit{für } x \in (x_0, x_0 + \epsilon), \end{aligned}$$

so besitzt f ein striktes lokales Minimum in x_0.

2. Sei f differnzierbar auf (a,b) und zweimal differenzierbar in $\mathbf{x}_0$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Dann besitzt f ein striktes lokales Minimum in x_0.

Bemerkung. Maxima analog durch Betrachtung der Funktion $-f$.

Beweis von Satz 6.2.7. 1. Proposition 6.2.6 Punkt 3 angewendet auf die Intervalle $(x_0 - \epsilon, x_0)$ bzw. $(x_0, x_0 + \epsilon)$ ergibt, dass f strikt monoton fallend auf $[x_0 - \epsilon, x_0]$ und strikt monoton wachsend auf $[x_0, x_0 + \epsilon]$. Damit folgt direkt, dass $f(x_0) < f(x)$ für $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \epsilon$.

2. Da
$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$
existiert $\epsilon > 0$, so dass für $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ gilt $\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} > 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f'(x) > f'(x_0) &= 0 \quad \text{für } x \in (x_0, x_0 + \epsilon) \\ f'(x) < f'(x_0) &= 0 \quad \text{für } x \in (x_0 - \epsilon, x_0) \end{aligned}$$

und die Behauptung ergibt sich aus Aussage 1.

$\square$

Kapitel 7

Das Riemann-Integral

7.1 Riemann-integrierbare Funktionen

Im Folgenden sei stets $a < b$.

Definition 7.1.1. 1. Eine Zerlegung eines Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $\tau \subset [a, b]$ mit $a, b \in \tau$. Zwei Punkte $x, y \in \tau$ heißen aufeinander folgend falls $x < y$ und $(x, y) \cap \tau = \emptyset$.

2. Eine Zerlegung σ von $[a, b]$ heißt Verfeinerung von einer Zerlegung τ, falls gilt $\tau \subset \sigma$.

3. Eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls eine Zerlegung τ von $[a, b]$ existiert, so dass für alle aufeinanderfolgenden $x, y \in \tau$ gilt, dass $f|_{(x,y)}$ konstant ist. Wir nennen f in diesem Fall Treppenfunktion zur Zerlegung τ. Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit $T[a, b]$.

Bemerkung. Eine Funktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Treppenfunktion, wenn $K \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \ldots, x_K$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_K = b$ und Werte $c_1, c_2, \ldots, c_K$ existieren, so dass

$$\varphi(x) = c_j \quad \text{für } x \in (x_{j-1}, x_j),\ j = 1, \ldots, k. \tag{7.1}$$

Die Wahl der Zerlegung und damit die Darstellung einer Funktion in (7.1) ist nicht eindeutig. Insbesondere ist jede Treppenfunktion zur Zerlegung τ auch eine Treppenfunktion zur Zerlegung σ, falls σ eine Verfeinerung von τ ist.

Definition 7.1.2. Für eine Treppenfunktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit Darstellung (7.1) setzen wir

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{K} c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Lemma 7.1.3. *Seien $\varphi, \psi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen.*

Monotonie: Falls $\varphi \le \psi$ (d.h., $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Linearität: Für $\lambda, mu \in \mathbb{R}$ ist auch $\lambda\varphi + \mu\psi$ Treppenfunktion und es gilt

$$\int_a^b (\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Seien τ, σ Zerlegungen von $[a, b]$, so dass φ eine Treppenfunktion zur Zerlegung τ und ψ eine Treppenfunktion zur Zerlegung σ ist. Dann ist sowohl φ als auch ψ eine Treppenfunktion zur Zerlegung $\tau \cup \sigma$.
Mit der Darstellung aus (7.1) bekommen wir

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_k \quad \text{für alle } x \in (x_{k-1}, x_k),\ k = 1, \dots, K, \\ \psi(x) &= d_k \quad \text{für alle } x \in (x_{k-1}, x_k),\ k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Damit folgt sofort Monotonie des Integrals über Treppenfunktionen, denn $\varphi \leq \psi$ impliziert $c_k \leq d_k$. Ebenso folgt Linearität, denn $\lambda\varphi + \mu\psi(x) = \lambda c_k + \mu d_k$ für die entsprechenden $k(x)$ aus der Darstellung (7.1). □

Definition 7.1.4. Sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wir definieren dann das untere (Riemann)-Integral

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f\right\}$$

sowie das obere (Riemann)-Integral

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \in T[a, b], \varphi \geq f\right\}.$$

Proposition 7.1.5. *Sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind Unter- und Oberintegral wohldefinierte Zahlen und es gilt*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.2}$$

Für Treppenfunktionen $g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Seien $m, M \in \mathbb{R}$ so dass $m \leq f \leq M$ auf $[a, b]$. Dann sind $\underline{\psi}, \overline{\psi} \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $\underline{\psi}(x) = m$, $\overline{\psi}(x) = M$ Treppenfunktionen mit $\underline{\psi} \leq f \leq \overline{\psi}$. Somit gilt aber

$$\begin{aligned} m(b - a) &= \int_a^b \underline{\psi}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f\right\} \\ &\leq \int_a^b \overline{\psi}(x)\,\mathrm{d}x = M(b - a) \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} m(b-a) &= \int_a^b \underline{\psi}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f\right\} \\ &\leq \int_a^b \overline{\psi}(x)\,\mathrm{d}x = M(b-a). \end{aligned}$$

Damit sind sowohl Ober- als auch Unterintegral wohldefinierte reelle Zahlen.
Seien nun $\varphi, \psi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Mit Lemma 7.1.3 folgt $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$. Diese Ungleichung bleibt bei Bildung des Supremums bzw. des Infimums im Ober- bzw. Unterintegral erhalten, also folge (7.2).
Die Gleichheit von Ober- und Unterintegral für Treppenfunktionen g folgt durch Wahl von $\varphi = g = \psi$, so dass sich

$$\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$$

ergibt. Zusammen mit (7.2) folgt die Behauptung. □

Definition 7.1.6. Eine beschränkte Funktion $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

In diesem Fall heißt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (Riemann-)Integral von f über $[a,b]$.
Sei $f \colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $[a,b] \subset D$. Wir nennen f integrierbar über $[a,b]$, falls die Einschränkung $f|_{[a,b]} \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Bemerkung. Nach Proposition 7.1.5 sind Treppenfunktionen integrierbar.

Satz 7.1.7. *Sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist integrierbar.*
2. *Zu jedem $\epsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ auf $[a,b]$ so dass*

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon.$$

Beweis. 1. ⇒ 2. folgt mit Satz 1.5.11, denn es existieren Treppenfunktionen $\varphi \leq f \leq \psi$ mit

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\epsilon}{2}$$

Durch Integrierbarkeit von f folgt

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \left(\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\epsilon}{2}\right) - \left(\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\epsilon}{2}\right) < \epsilon$$

Für den Beweis von 2. ⇒ 2. seien φ, ψ wie in 2. gewählt. Es folgt

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann folgt die Behauptung. □

Satz 7.1.8. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass f monoton wachsend ist, der Fall dass f monoton fallend ist folgt analog. Es folgt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in [a,b]$ und somit ist f beschränkt.
Sei nun $K \in \mathbb{N}$ und $x_k^{(K)} = a + k\frac{b-a}{K}$ für $k = 0, \ldots, K$. Wir konstruieren damit Treppenfunktionen φ_K, ψ_K durch

$$\varphi_K(x) = f(x_{k-1}^{(K)}), \quad \psi_K(x) = f(x_k^{(K)}) \quad \text{für } x \in \left[x_{k-1}^{(K)}, x_k^{(K)}\right), \; k = 1, \ldots, K.$$

Der Wohldefiniertheit wegen setzen wir $\varphi_K(b) = \psi_K(b) = f(b)$.
Durch die Monotonität von f folgt $\varphi_K \leq f \leq \psi_K$ und rechnen

$$\begin{aligned}
\int_a^b \psi_K(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_K(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^K f(x_k^{(K)})\frac{b-a}{K} - \sum_{k=1}^K f(x_{k-1}^{(K)})\frac{b-a}{K} \\
&= \frac{b-a}{K}\sum_{k=1}^K \left(f(x_k^{(K)}) - f(x_{k-1}^{(K)})\right) \\
&\leq \frac{b-a}{K}(f(b) - f(a)) \to 0 \quad \text{für } K \to \infty.
\end{aligned}$$

Mit Satz 7.1.7 folgt Integrierbarkeit von f. □

Bemerkung. Insbesondere sehen wir, dass für monotone $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty} \frac{b-a}{K}\sum_{k=1}^K f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{K}\right) = \lim_{K\to\infty}\frac{b-a}{K}\sum_{k=1}^K f\left(a + k\frac{b-a}{K}\right)$$

Beispiel. Sei $b > 0$, $f\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{K\to\infty}\frac{b}{K}\sum_{k=1}^K f\left((k-1)\frac{b}{K}\right) = \lim_{K\to\infty}\frac{b^4}{K^4}\sum_{k=0}^{K-1} k^3 \\
&= \lim_{K\to\infty}\frac{b^4}{K^4}\frac{1}{4}(K-1)^2K^2 = \frac{b^4}{4},
\end{aligned}$$

wobei wir die Identität $\sum_{k=0}^{K-1} k^3 = \frac{1}{4}(K-1)^2K^2$ – zu beweisen mittels vollständiger Induktion – benutzt wurde.

Satz 7.1.9. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Nach Folgerung 4.3.6 und Satz 4.3.8 ist f beschränkt und gleichmäßig stetig. Sei nun $\epsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \text{für } |x-y| < \delta,\ x, y \in [a, b].$$

Nun wählen wir $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{K} < \delta$. Wir betrachten wieder die äquidistante Zerlegung $x_k^{(K)} = a + k\frac{b-a}{K}$ und setzen

$$\varphi_K(x) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad \psi_K(x) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \text{für } x \in [a, b]. \tag{7.3}$$

Damit folgt $\varphi_K \leq f \leq \psi_K$ und aus der Wahl von K folgt $\psi_K(x) - \varphi_K(x) \leq \frac{\epsilon}{b-a}$ für alle $x \in [a, b]$. Wir rechnen

$$\int_a^b \psi_K(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_K(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{K} \frac{b-a}{K} = \epsilon.$$

Aus Satz 7.1.7 folgt Integrierbarkeit von f. □

Satz 7.1.10. *Sei $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes $K \in \mathbb{N}$ und jede Zerlegung*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_K = b \quad \textit{mit} \max_{k=1,\ldots,K}(x_k - x_{k-1}) < \delta \tag{7.4}$$

und alle $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, K$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{K} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \epsilon.$$

Bemerkung. Den Ausdruck $\sum_{k=1}^{K} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$ nennen wir auch Riemann-Summe.

Beweis von Satz 7.1.10. Sei $\epsilon > 0$. Wieder ist f nach Folgerung 4.3.6 und Satz 4.3.8 beschränkt und gleichmäßig stetig. Zu $\epsilon > 0$ existiert nun wie oben $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \text{für } |x-y| < \delta,\ x, y \in [a, b].$$

Mit einer Zerlegung nach (7.4) mit diesem δ. Mit Treppenfunktionen zu dieser Zerlegung wie in (7.3) sowie einer weiteren Treppenfunktion

$$g(x) = f(z_k), \quad \text{für } x \in [x_{k-1}, x_k),\ k = 1, \ldots, K, \quad g(b) = f(b),$$

folgt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \epsilon.$$

□

7.2 Integrationsregeln und der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 7.2.1 (Monotonie des Integrals)**.** *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $f \leq g$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Für $\varphi \in T[a,b]$, $\varphi \leq f$ folgt auch $\varphi \leq g$. Damit gilt aber

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \in T[a,b], \varphi \leq f\right\}\\ &\leq \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \varphi \in T[a,b], \varphi \leq g\right\} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

Folgerung 7.2.2. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und seien $m, M \in \mathbb{R}$, so dass $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 7.2.1 mit der Wahl $g(x) = m$, bzw. $g(x) = M$ (mit umgekehrter Ungleichung) für alle $x \in [a,b]$. □

Satz 7.2.3 (Linearität des Integrals)**.** *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.5}$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und seien φ_f, φ_g, ψ_f, ψ_g Treppenfunktionen mit $\varphi_f \leq f \leq \psi_f$, $\varphi_g \leq g \leq \psi_g$ und $\int_a^b \psi_{f,g}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_{f,g}(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{|\lambda|+|\mu|+1}$. Die Existenz dieser Treppenfunktionen ist durch Satz 7.1.7 garantiert. Dann sind auch $\lambda\varphi_f + \mu\varphi_g$ und $\lambda\psi_f + \mu\psi_g$ Treppenfunktionen und es gilt

$$\lambda\varphi_f + \mu\varphi_g \leq \lambda f + \mu g \leq \lambda\psi_f + \mu\psi_g \quad \text{und} \quad \int_a^b \lambda\psi_f(x) + \mu\psi_g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \lambda\varphi_f(x) + \mu\varphi_g(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon.$$

Somit folgt Integrierbarkeit wieder mit Satz 7.1.7.
Gleichung (7.5) folgt mit

$$\begin{aligned}\lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon &\leq \lambda \int_a^b \varphi_f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \varphi_g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lambda\varphi_f(x) + \mu\varphi_g(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_a^b \lambda\psi_f(x) + \mu\psi_g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \psi_f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \psi_g(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \epsilon\end{aligned}$$

Mit der Beliebigkeit der Wahl von $\epsilon > 0$ folgt die Behauptung. □

Satz 7.2.4 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar mit* $g \geq 0$*. Dann existiert* $x_0 \in [a,b]$*, so dass*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Für g konstant Eins und f wie in Satz 7.2.4 ergibt sich Existenz von $\xi \in [a,b]$ mit

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi).$$

Beweis von Satz 7.2.4. Wir setzen $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann sind nach Satz 7.2.3 die Funktionen mg, Mg integrierbar und es gilt $mg \leq fg \leq Mg$. Mit Satz 7.2.1 folgt

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Falls $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ ist g konstant Null und die Aussage ist trivial. Andernfalls gilt

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

und mit dem Zwischenwertsatz 4.3.1 folgt Existenz von $x_0 \in [a,b]$, so dass

$$f(x_0) = \frac{1}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

und somit die Behauptung. □

Lemma 7.2.5. *Sei* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $g \geq 0$*. Falls* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *so folgt* g *konstant Null.*

Beweis. Angenommen es existiert $x_0 \in [a,b]$, so dass $g(x_0) = c > 0$. Mit Stetigkeit von g folgt Existenz von $\delta > 0$, so dass $g(x) \geq \frac{c}{2}$ für $|x - x_0| < \delta$, $x \in [a,b]$. Damit gilt aber $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{c}{2} & \text{falls } |x-x_0| < \delta,\ x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Somit gilt

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geq \delta\frac{c}{2} > 0.$$

Analog folgt die Aussage falls $x_0 \in [a,b]$ existiert, so dass $g(x_0) = c > 0$. □

Definition 7.2.6. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. Dann definieren wir den Positiv- und Negativteil von f, geschrieben $f_+, f_-\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. Es gilt

$$f_-(-f)_+, \quad f = f_+ - f_-, \quad \text{und} \quad |f| = f_+ + f - .$$

Definieren wir $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(r) = \begin{cases} r & \text{falls } r \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so folgt $f_+ = \Phi \circ f$, $f_- = \Phi \circ (-f)$. Die Funktion Φ ist stetig und monoton und es gilt

$$0 \leq \Phi(r) - \Phi(s) \leq s - r \quad \text{für } r \leq s.$$

Somit folgt für $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, $f \leq g$

$$0 \leq g_+ - f_+ \leq g - f. \tag{7.6}$$

Proposition 7.2.7. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist auch $|f|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f|(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Wie immer garantiert Satz 7.1.7 Existenz von Treppenfunktionen $\varphi \leq f \leq \psi$ mit $\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon$.
Mit φ und ψ sind nun auch φ_+ und ψ_+ und mit Gleichung (7.6) folgt $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ sowie $\psi_+ - \varphi_+ \leq \psi_+ - \varphi_+$. Damit gilt aber

$$\int_a^b \psi_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon.$$

Somit ist f_+ nach Satz 7.1.7 integrierbar. Da $f_- = f_+ - f$ ist mit Satz 7.2.3 auch f_- und somit $|f| = f_+ + f_-$ integrierbar.
Die Abschätzung folgt, da

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| &= \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\} \\ &= \max\left\{ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \right\} \leq \int_a^b |f|(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

mit Satz 7.2.1 da $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$. □

7.3 Integration und Differentiation

Satz 7.3.1 (Gebietsadditivität)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in (a,b)$. Dann ist f genau dann integrierbar über $[a,b]$ wenn f über $[a,x_0]$ und über $[x_0,b]$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Folgt direkt durch Betrachtung entsprechender Treppenfunktionen und deren Einschränkung auf die jeweiligen Teilintervalle. □

Definition 7.3.2. Sei I ein abgeschlossenes Intervall mit Intervallgrenzen a, b, nicht notwendigerweise verschieden. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei integrierbar, oder es gelte $a = b$. Dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x & \text{falls } a < b, \\ -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x & \text{falls } b < a, \\ 0 & \text{falls } a = b. \end{cases}$$

Bemerkung. Die integrale auf der rechten Seite sind als die bekannten Integrale über Intervalle $[a, b]$ bzw. $[b, a]$ zu verstehen, mit der Definition haben wir nun aber auch integrale mit vertauschten Grenzen bzw. zusammenfallenden Grenzen definiert.

Folgerung 7.3.3. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und die Funktion $f\colon [\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$ sei auf allen aus $\{a, b, c\}$ erzeugbaren abgeschlossenen Intervallen integrierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Beweis. Folgt direkt durch Permutation der Intervallgrenzen und Vorzeichenänderung durch Definition 7.3.2 aus Satz 7.3.1 □

Satz 7.3.4 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung)**.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, gegeben durch*

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für } x \in [a, b],$$

differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Sei $x_0 \in [a, b]$. Mit Folgerung 7.3.3 rechnen wir

$$0 = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_x^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(x_0) - \int_{x_0}^x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mit Folgerung 7.2.2 gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &\le \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x f(x)\,\mathrm{d}x - (x - x_0) f(x_0) \right| \\ &\le \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x f(x) - f(x_0)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\le \sup_{x \in I(x, x_0)} |f(x) - f(x_0)|, \end{aligned}$$

wobei $I(x, x_0)$ das abgeschlossene Intervall mit Grenzen x und x_0 bezeichnet. Da f stetig ist, konvergiert die rechte Seite gegen Null für $x \to x_0$ und die Behauptung folgt. □

Satz 7.3.5 (Stammfunktion)**.** *Seien f, F wie in Satz 7.3.4. Dann sind für $G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ äquivalent*

1. *$F - G$ ist konstant auf $[a, b]$,*
2. *G ist differenzierbar mit $G' = f$.*

In diesem Fall heißt G Stammfunktion von f und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = G(x)|_{x=a}^{x=b} = [G(x)]_{x=a}^{x=b} = [G]_a^b\,.$$

Beweis. Falls $F - G$ konstant, so folgt sofort Differenzierbarkeit von G mit $(F-G)' = 0$, also $G' = F' = f$. Ist andererseits $G' = f$, so gilt $G' = F'$, also $(F-G)' = 0$. $G - F$ ist damit konstant nach Proposition 6.2.6. □

Beispiel.

1. Seien $s \in \mathbb{R}$, $s \neq -1$, $0 < a < b$. Dann gilt

   $$\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+s}b^{s+1} - \frac{1}{1+s}a^{s+1},$$

   denn $F(x) = \frac{1}{1+s}x^{s+1}$ ist eine Stammfunktion von x^s.

2. Für $0 < a < b$ ist

   $$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln b - \ln a.$$

3. Es gilt

   $$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos]_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

Satz 7.3.6 (Substitutionsregel)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\varphi([c,d]) \subset [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Die Aussage folgt mit der Kettenregel, Satz 6.1.7, dass

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Damit ist $(F \circ \varphi)$ Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\varphi'$ und wir erhalten

$$\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = [F \circ \varphi]_c^d == F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

Beispiel.

1. Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$. Dann gilt

   $$\int_a^b f(\alpha t + \beta)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_a^b f(\alpha t + \beta)\cdot\alpha\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   aufgrund von Satz 7.3.6 mit $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, so dass $\varphi'(t) = \alpha$.

2. Sei $[c,d] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann gilt

   $$\int_c^d \tan y\,\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{-\cos' y}{\cos y}\,\mathrm{d}y = -\int_{\cos c}^{\cos d} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos d) + \ln(\cos c),$$

   wobei wir die Substitutionsregel aus Satz 7.3.6 mit $x = \varphi(y)$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ verwendet haben und bemerken, dass $\cos y \neq 0$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Mit der Transformation $x = \varphi(t) = \sin t$, $x \in [0,1]$, also $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin x$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ rechnen wir

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t.$$

Es gilt $\varphi'(t) = \cos t$, also mit Satz 7.3.6

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(1)} \cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Wegen $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$ ergibt sich

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1}{4}(1+\cos s)\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Satz 7.3.7 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Nach der Produktregel, Satz 6.1.6 Punkt 2, gilt $(fg)' = f'g + g'f$, und somit ist fg eine Stammfunktion von $f'g + g'f$. Der Rest folgt mit einfacher Rechnung. □

Beispiel. 1. Sei $0 < a < b$. Dann gilt

$$\int_a^b \ln x\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = [x \ln x]_a^b - \int_a^b x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [x(\ln x - 1)]_a^b.$$

2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin^3 x\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \sin x \cdot \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos x \cdot \sin^2 x]_a^b - \int_a^b -\cos x \cdot (2\sin x \cdot \cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos x \cdot \sin^2 x]_a^b + 2\int_a^b \sin x \cdot (1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos x \cdot \sin^2 x - 2\cos x]_a^b - 2\int_a^b \sin^3 x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_a^b \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[-\cos x \cdot \sin^2 x - 2\cos x]_a^b.$$

7.4 Uneigentliche Integrale

Definition 7.4.1. 1. Sei $I = [a,b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann heißt $f\colon I \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar über I, falls f für jedes $x_0 \in I$ über $[a, x_0]$ integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{x_0 \nearrow b} \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.

2. Sei $I = (a, b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Dann heißt $f\colon I \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar über I, falls f für jedes $x_0 \in I$ über $[x_0, b]$ integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{x_0 \searrow a} \int_{x_0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert.

3. Sei $I = (a, b)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann heißt $f\colon I \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar über I, falls ein $x_0 \in I$ existiert, so dass f über $(a, x_0]$ und über $[x_0, b)$ uneigentlich integrierbar ist. Wir schreiben in diesem Fall

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(a,x_0]} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{[x_0,b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Wegen Satz 7.3.1 hängt weder Integrierbarkeit noch Wert des Integrals von der Wahl von x_0 ab.

Beispiel.

Wir betrachten $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^s$, $s \in \mathbb{R}$. Dann ist f für alle $z \in \mathbb{R}$ auf $[1, z]$ integrierbar und für alle $s \neq -1$ gilt

$$\int_1^z f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+s}\left[x^{s+1}\right]_1^z = \frac{1}{s+1} z^{s+1} - \frac{1}{1+s}.$$

Damit ist f für alle $s < -1$ uneigentlich über $[1, \infty)$ integrierbar und für kein $s > -1$ uneigentlich über $[1, \infty)$ integrierbar.
Für $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ bekommen wir

$$\int_1^z f(x)\,\mathrm{d}x = [\ln]_1^z = \ln x \to \infty \quad \text{für } z \to \infty$$

keine uneigentliche Integrierbarkeit für f über $[1, \infty)$.

Analog dazu bekommen wir, dass $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^s$, $s \in \mathbb{R}$ genau dann uneigentlich über $(0, 1]$ integrierbar ist, wenn $s > -1$ mit

$$\int_0^1 x^s\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s+1}.$$

Kapitel 8

Reihen redux

8.1 Potenzreihen

Satz 8.1.1 (Integralvergleichstest)**.** *Sei* $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *monoton fallend und nichtnegativ. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *genau dann, wenn* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert.*

Beweis. Für $k \geq 2$, $x \in [k-1, k]$ gilt $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$. Durch Integration folgt

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1) \quad \text{also} \quad \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Konvergiert das Integral, so sind die Partialsummen nach oben beschränkt und die Reihe konvergiert nach Satz 2.1.9. Ist die Reihe konvergent, so ist das Integral eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Funktion der oberen Grenze, also ebenfalls konvergent. □

Beispiel (die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha$). Für $\alpha < 0$ ist die Funktion $f(x) = x^\alpha$ nichtnegativ und fallend auf $[1,\infty)$. Das Integral $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ konvergiert genau für $\alpha < -1$, siehe Abschnitt 7.4. Somit konvergieren auch die Reihen genau für $\alpha < -1$.

Mit die einfachsten Funktionen, die wir kennen, sind die Polynome. Es ist naheliegend, neue Funktionen als Grenzwerte von Folgen bzw. Reihen von Polynomen zu suchen. Dies führt auf den Begriff der Potenzreihe.

Definition 8.1.2 (Potenzreihen)**.** Eine (reelle oder komplexe) Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{R} \text{ bzw. } a_k \in \mathbb{C}..$$

für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{C}$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ haben wir eine Reihe von reellen Zahlen. Die Frage ist, für welche x die Reihe konvergiert. Es ist immer $P(0) = a_0$, aber schlimmstenfalls divergiert die Reihe für alle $x \neq 0$, dann ist sie natürlich nicht von Interesse. Ein Beispiel ist $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ (verwende den Nullfolgentest). Als anderes Extrem kann die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent sein, wie bei $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, der Exponentialreihe. Ein anderes Beispiel ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, die genau für $x \in (-1, 1)$ konvergiert. Allgemein kann die Menge der x, für die eine Potenzreihe konvergiert und damit eine Funktion definiert, wie folgt charakterisiert werden.

Satz 8.1.3 (Konvergenzradius)**.** *Zu jeder (reellen oder komplexen) Potenzreihe* $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *gibt es genau ein* $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, *den Konvergenzradius, mit folgender Eigenschaft:*

$$P(x) \textit{ ist } \begin{cases} \textit{absolut konvergent} & \textit{für } |x| < R, \\ \textit{divergent} & \textit{für } |x| > R. \end{cases}$$

Bemerkung. Für $|x| = R$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis. Die Eindeutigkeit von R ist klar. Zur Existenz definieren wir

$$R = \sup\{|x| : P(x) \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty].$$

Für $|x| > R$ ist dann offensichtlich $P(x)$ divergent. Sei nun $|x| < R$, also $P(x_0)$ konvergent für ein x_0 mit $|x| < |x_0|$, also $q = |x|/|x_0| < 1$. Nach Satz 3.1.4 geht $|a_k||x_0|^k$ gegen Null, also gibt es ein $M \in [0, \infty)$ mit $|a_k||x_0|^k \leq M$ für alle k. Es folgt

$$|a_k|\,|x|^k = |a_k|\,|x_0|^k \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^k \leq M q^k.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert, also folgt absolute Konvergenz aus dem Majorantenkriterium, Satz 3.1.9. □

Innerhalb des Konvergenzradius $|x| < R$ definiert eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Funktion. Es stellt sich sich die Frage, ob $P(x)$ differenzierbar ist und wenn ja, ob wir $P'(x)$ durch gliedweise Differentiation berechnen können, also ob gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}?$$

Bisher haben wir nur Punktweise Konvergenz der durch die Potenzreihe auf $|x| < R$ definierten (Polynom-)Funktionenfolge $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ gezeigt. Dies ist – wir wir bereits gesehen haben – nicht einmal für Stetigkeit der Funktion im Grenzwert hinreichend. Gleichmäßige Konvergenz hingegen würde zumindest Stetigkeit von P innerhalb des Konvergenzradius zeigen (Satz 4.3.11).
Es gilt in diesem Fall noch mehr. Wir betrachten ab sofort wieder den reellen Fall, nachdem Ableitung und Integral komplexer Funktionen noch nicht bekannt sind.

Satz 8.1.4 (Vertauschung von Konvergenz und Integral)**.** *Seien* $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar. Falls die* f_n *gleichmäßig gegen* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *konvergieren, so ist* f *integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Die Integrierbarkeit von f folgt mit dem üblichen Argument: Sei zunächst $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)+2}$. Seien nun $\varphi \leq f_n \leq \psi$ Treppenfunktionen deren Integrale sich um weniger als $\frac{\epsilon}{2}$ unterscheiden. Dann gilt $\varphi - \frac{\epsilon}{2(b-a)+2} \leq f \leq \psi + \frac{\epsilon}{2(b-a)+2}$ und die Integrale von $\varphi - \frac{\epsilon}{2(b-a)+2}$ und $\psi + \frac{\epsilon}{2(b-a)+2}$ unterscheiden sich um weniger als ϵ. Integrierbarkeit folgt mit Satz 7.1.7.

Die Standardabschätzung des Integrals, siehe Proposition 7.2.7, liefert

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,dx\right| \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) \to 0$$

für $n \to \infty$. $\square$

Satz 8.1.5 (Vertauschung von Konvergenz und Ableitung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f_n \to f$ punktweise auf I. Falls die Folge der Ableitungen f_n' gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergiert, so ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$.*

Beweis. Für $x_0 \in I$ gilt nach Satz 7.3.4, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Da f_n' gleichmäßig gegen g konvergiert, folgt nach Satz 8.1.4 mit $n \to \infty$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{für alle } x \in I.$$

Die Funktion g ist stetig nach Satz 4.3.11, also folgt wieder mit dem Hauptsatz $f' = g$. $\square$

Wir kommen jetzt auf die Potenzreihen zurück. Bevor wir die Sätze anwenden können, müssen wir die Frage der Gleichmäßigkeit der Konvergenz klären. Sei $P(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Es gilt

$$P(x) - P_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty a_k x^k \quad \text{mit } P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Wir schätzen wie in Satz 8.1.3 ab. Für $\varrho < R$ wähle $r \in (\varrho, R)$, also $q = \varrho/r < 1$. Da $P(r)$ konvergiert, gilt $|a_k| r^k \le M$ für alle k. Es folgt für $n \to \infty$

$$\sup_{x\in[-\varrho,\varrho]} |P(x) - P_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^\infty |a_k|\,\varrho^k = \sum_{k=n+1}^\infty |a_k| r^k \Big(\frac{\varrho}{r}\Big)^k \le M \sum_{k=n+1}^\infty q^k = \frac{Mq^{n+1}}{1-q} \to 0$$

für $n \to \infty$.

Satz 8.1.6. *Eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ konvergiert auf jedem Teilintervall $[-\varrho, \varrho]$ gleichmäßig, und $P(x)$ ist stetig auf $(-R, R)$.*

Beweis. Gleichmäßige Konvergenz wurde soeben gezeigt, Stetigkeit folgt mit Satz 4.3.11, da Polynome stetige Funktionen sind. $\square$

Um die Ableitung einer Potenzreihe zu bilden, brauchen wir eine Hilfsaussage.

Lemma 8.1.7. *Sei $P(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$. Dann hat die formal differenzierte Reihe*

$$Q(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}.$$

denselben Konvergenzradius R.

Beweis. Da $|a_k x^k| \leq |k a_k x^{k-1}| \cdot |x|$ für $k \geq 1$, hat $Q(x)$ höchstens Konvergenzradius R. Zu $r \in (0,R)$ gibt es ein $M \in [0,\infty)$ mit $|a_k| r^k \leq M$, da $P(r)$ konvergiert. Es folgt für $0 < |x| < r$, also $q = |x|/r \in (0,1)$,

$$k|a_k|\,|x|^{k-1} = \frac{|a_k|r^k}{|x|}\,k\,\left(\frac{|x|}{r}\right)^k \leq \frac{M}{|x|} k q^k.$$

Da $\ln q < 0$, konvergiert das Integral der Funktion $f(s) = sq^s = se^{s \ln q}$ auf $[0,\infty)$ (mit partieller Integration). Also ist die rechte Reihe konvergent nach Satz 8.1.1, und $Q(x)$ ist absolut konvergent für $|x| < R$. □

Satz 8.1.8 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)**.** *Eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist auf dem Intervall $(-R,R)$ differenzierbar, und die Ableitung kann gliedweise berechnet werden, also*

$$P'(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1} \quad \text{für alle } x \in (-R,R).$$

Beweis. Die Funktionen $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ konvergieren auf $(-R,R)$ punktweise gegen $P(x)$, und nach Lemma 8.1.7 und Satz 8.1.6 konvergieren die P_n' gleichmäßig auf jedem Teilintervall $[-\varrho,\varrho] \subset (-R,R)$ gegen die stetige Funktion $Q\colon (-R,R) \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}$. Die Behauptung folgt aus Satz 8.1.5.

□

Beispiel.

1. Für $x \in (-1,1)$ gilt die Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots.$$

Es gilt $\ln(1+x)' = (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k$ für $x \in (-1,1)$ (geometrische Reihe für $z = -x$). Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[0,x]$, also können wir Satz 8.1.4 anwenden:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+\xi}\,d\xi = \int_0^x \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \xi^k\,d\xi = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^x \xi^k\,d\xi = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

2. Ähnlich zeigen wir für $x \in (-1,1)$ die Reihenentwicklung

$$\tan^{-1} x = \arctan x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots.$$

Wir rechnen $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^{2k}$, und es folgt mit Satz 8.1.4

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi = \int_0^x \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \xi^{2k}\,d\xi = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^x \xi^{2k}\,d\xi = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

8.2 Die Taylorreihe

Satz 8.2.1 (Taylorentwicklung)**.** *Sei $f \in C^{k+1}(I)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_k(x) \quad \text{für } x \in I,$$

wobei das Restglied $R_k(x)$ folgende Darstellungen besitzt:

$$\begin{aligned} R_k(x) &= \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-y)^k\, f^{(k+1)}(y)\,dy \qquad \text{(Cauchy)} \qquad (8.1)\\ &= \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \text{ für ein } \xi \in [x_0,x] \qquad \text{(Lagrange).} \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen erst (8.1) durch Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$. Der Fall $k=0$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(y)\,dy.$$

Der Induktionsschritt ist beruht auf partieller Integration, und zwar gilt für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} R_k(x) &= R_{k-1}(x) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\ &= \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-y)^{k-1} f^{(k)}(y)\,dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\ &= \frac{1}{(k-1)!}\left[-\frac{(x-y)^k}{k}\, f^{(k)}(y)\right]_{y=x_0}^{y=x} + \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-y)^k\, f^{(k+1)}(y)\,dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\ &= \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-y)^k\, f^{(k+1)}(y)\,dy. \end{aligned}$$

Die Lagrangedarstellung folgt hieraus mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, Satz 7.2.4. Sei zum Beispiel $x \geq x_0$, dann gilt für ein $\xi \in [x_0,x]$

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-y)^k\,dy = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}.$$

□

Beispiel. Betrachte für $x \in (-1,1)$ die Funktion $f(x) = (1-x)^{-1/2}$, mit Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2}.$$

Es gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1/2$, also lautet das Taylorpolynom der Ordnung Eins in $x_0 = 0$

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

mit der Lagrange-Restglieddarstellung

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = \frac{3}{8}(1-\xi)^{-5/2}x^2 \quad \text{für ein } \xi \in [0,x].$$

Als Anwendung erhalten wir für die relativistische Energie eines Teilchens mit Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v, wenn wir $\beta = v/c$ setzen,

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{f''(\xi)}{2}\beta^4\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \Delta E.$$

Dabei ist der erste Term die Ruheenergie und der zweite die klassische kinetische Energie. Für den relativistischen Korrekturterm ergibt sich aus der Restglieddarstellung die Abschätzung

$$\frac{\Delta E}{E_{kin}} = f''(\xi)\beta^2 \leq f''(\beta^2)\beta^2 < 0.008 \quad \text{für } \beta \leq 0.1.$$

Bei Geschwindigkeiten $v \leq \frac{1}{10}c$ beträgt die relativistische Korrektur weniger als ein Prozent der klassischen kinetischen Energie.

Definition 8.2.2. Für $f \in C^\infty(I)$ und $x_0 \in I$ heißt die Reihe

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

Taylorreihe von f mit Zentrum x_0.

Bemerkung. Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe, wenngleich mit Zentrum x_0 statt dem Nullpunkt. Wir können aber alle Aussagen zur Konvergenz anwenden. Nach Satz 8.1.3 gibt es ein $R \in [0, \infty]$, den Konvergenzradius, so dass die Reihe für $|x - x_0| < R$ absolut konvergiert, für $|x - x_0| > R$ dagegen divergiert. Es ist nun naheliegend zu vermuten, dass die Reihe auf $(-R, R)$ gegen $f(x)$ konvergiert. Das ist im allgemeinen aber falsch, zum Beispiel kann man zeigen, dass folgende Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$ ist:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Offenbar ist $f^{(j)}(0) = 0$ für alle j, und somit sind alle Taylorpolynome Null, die Taylorreihe liefert die Nullfunktion und nicht die Funktion $f(x)$.

Satz 8.2.3 (Darstellbarkeit durch die Taylorreihe)**.** *Sei $f \in C^\infty(I)$, und $P(x)$ sei die Taylorreihe von $f(x)$ mit Zentrum $x_0 \in I$. Für jedes $x \in I$ gilt dann*

$$f(x) = P(x) \quad \textit{genau dann wenn} \quad \lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0.$$

Beweis. Wegen $f(x) - P_k(x) = R_k(x)$ ist die Aussage trivial. □

Bemerkung. Wird die Funktion $f(x)$ auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ durch eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ dargestellt, so hat diese Reihe Konvergenzradius mindestens $\delta > 0$ und kann auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gliedweise differenziert werden nach Satz 8.1.8. Somit ist $f(x)$ auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ unendlich oft differenzierbar, und es folgt

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j|_{x=x_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} a_j (x - x_0)^j|_{x=x_0} = k! a_k.$$

Die darstellende Reihe muss also die Taylorreihe sein. Funktionen $f \colon I \to \mathbb{R}$, die in der Nähe jedes Punkts $x_0 \in I$ durch ihre Taylorreihe dargestellt werden, nennt man (reell-) analytisch.

Mit der Taylorreihe leiten wir nun einige wichtige Reihenentwicklungen ab.

Beispiel. 1. Für die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ gilt

$$\cos^{(j)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{für } j = 2k \\ 0 & \text{für } j = 2k+1 \end{cases} \qquad \sin^{(j)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{für } j = 2k+1 \\ 0 & \text{für } j = 2k. \end{cases}$$

Daraus folgen die Taylorentwicklungen, für geeignete $\xi \in [0, x]$,

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \cos^{(2n+2)}(\xi) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \sin^{(2n+3)}(\xi) \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}. \end{aligned}$$

Da $x^k/k! \to 0$ mit $k \to \infty$, gehen die Restglieder mit $n \to \infty$ gegen Null. Also folgen die Reihendarstellungen

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} \pm \ldots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} \pm \ldots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dies kann mit Satz 5.3.7 verglichen werden.

2. Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$. Im Fall $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ab jetzt sei $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0$. Dann gilt $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\,(1+x)^{\alpha-k} \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$, also ist die Taylorreihe von $f(x)$ mit Zentrum $x_0 = 0$ die Binomialreihe

$$B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots.$$

Um den Konvergenzradius der Reihe zu bestimmen, berechnen wir für die Glieder $a_k = \binom{\alpha}{k} x^k$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|\alpha - k|}{k+1} |x| \to |x| \quad \text{für } k \to \infty.$$

Das Quotientenkriterium Satz 3.1.10 liefert also den Konvergenzradius $R = 1$. Die Frage ist nun, ob die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $(-1, 1)$ durch die Reihe dargestellt wird. Da die Abschätzung des Restglieds etwas kompliziert ist, vor allem im Fall $x < 0$, gehen wir anders vor und berechnen auf $(-1, 1)$ mit Satz 8.1.8 die Ableitung

$$B'_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\alpha - k}{k+1} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha B_\alpha(x) - x B'_\alpha(x),$$

das heißt $B'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{1+x} B_\alpha(x)$. Es folgt mit $g(x) = (1+x)^{-\alpha}$

$$(gB_\alpha)'(x) = g'(x)B_\alpha(x) + g(x)B'_\alpha(x) = g(x)B_\alpha(x)\Big(-\frac{\alpha}{1+x} + \frac{\alpha}{1+x}\Big) = 0.$$

Wegen $B_\alpha(0) = 1 = f(0)$ ergibt sich die folgende Darstellung (Newton 1665)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{für alle } x \in (-1,1). \tag{8.2}$$

Oft wird die Näherung $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ für $|x| \ll 1$ benutzt, siehe das Beispiel zur Relativität oben.