Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
C. Hounkpe

31.01.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Klausurvorbereitungsblatt

Von den folgenden vier Aufgaben wird nicht weniger als eine in der Klausur gestellt.

Aufgabe 1 (Goldener Schnitt)
Die positive Zahl $g \in \mathbb{R}$ welche $g = 1 + \frac{1}{g}$ erfüllt, heißt goldener Schnitt.

(i) Bestimmen Sie g.

(ii) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, gegeben durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Zeigen Sie, dass gilt
$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g.$$

(iii) Die Fibonacci-Zahlen sind für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$. Zeigen Sie, dass gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = g.$$

Aufgabe 2 (Stetigkeit)

(i) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass sogar gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ die n-te Wurzelfunktion. Zeigen Sie, dass f stetig ist. Zeigen Sie weiters, dass kein $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in [0,\infty)$.

Aufgabe 3 (Taylor)
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, derart, dass für ein $c \in (a,b)$ gilt:
$$0 = f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c), \quad f^{(n)}(c) \neq 0$$

(i) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt c.

(ii) Sei n ungerade. Zeigen Sie, dass dann c ein Sattelpunkt von f ist.

(iii) Sei n gerade. Zeigen Sie, dass dann c ein lokales Maximum (für $f^{(n)}(c) < 0$) oder ein lokales Minimum (für $f^{(n)}(c) > 0$) ist.

(iv) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Wenden Sie (ii) bzw. (iii) für $f(x) = x^k$ an, um zu sehen, welche Art von Extremstelle der Punkt $x = 0$ ist.

Aufgabe 4 (Hauptsatz)
Seien I, I^* abgeschlossene Intervalle, $f\colon I^* \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b\colon I \to I^*$ differenzierbare Funktionen. Wir setzen $\Phi\colon I \to \mathbb{R}$,
$$\Phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Zeigen Sie, dass Φ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Die folgenden Aufgaben dienen als Beispiele für weitere typische Klausur(teil-)aufgaben.

Aufgabe 5
Sei $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{5a_n+3}{20}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 6
Betrachten Sie die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^2} 2^k x^k$. Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$, ob die Potenzreihe absolut konvergent und/oder konvergent ist.

Aufgabe 7
Der Tangenshyperbolicus ist definiert durch

$$\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \tanh x := \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Sei $B := \tanh(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ das Bild dieser Funktion.

(i) Bestimmen Sie $\lim_{x\to\pm\infty} \tanh(x)$.

(ii) Begründen Sie, dass die Funktion $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\tanh\colon \mathbb{R} \to B$ bijektiv ist.

(iv) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von $\tanh\colon \mathbb{R} \to B$.

Aufgabe 8

(i) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ii) Stellen Sie für $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, geeignete Riemannsummen für äquidistante Zerlegungen des Intervalls $[0,1]$ auf und rechnen Sie nach, dass diese Summen gegen das Integral $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$ konvergieren.

Aufgabe 9
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $\int_0^1 x^2 \ln(x) \,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int_2^3 \frac{3x^2+1}{x^3+x-9} \,\mathrm{d}x$.

Abgabe: keine Abgabe, freiwillige Vorbereitung