Abteilung für Angewandte Mathematik

P. Dondl
C. Hounkpe

08.01.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 10

Aufgabe 1 (Stetige Umkehrfunktion) (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass $f\colon [-1,0)\cup(0,1)\to(-1,1)$, $f(x)=x-x/|x|$ eine stetige bijektive Abbildung ist, deren Umkehrfunktion jedoch nicht stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jede stetige injektive Funktion $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ notwendigerweise streng monoton ist.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen) (4 Punkte)
Berechnen Sie für folgende komplexe Zahlen jeweils Realteil, Imaginärteil und Norm.

(i) $\dfrac{5}{3-4i}$ (ii) $\dfrac{8+8\sqrt{3}\,i}{\frac{1}{\sqrt{3}}+i}$ (iii) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ (iv) $\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{-1}$

Aufgabe 3 (Komplexe Cauchy-Folgen) (4 Punkte)
Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $z_n=x_n+iy_n$ mit $x_n,y_n\in\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 4 (Additionstheoreme) (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.

(ii) Folgern Sie, dass für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x)-\cos(y) \;=\; -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

(iii) Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus die Werte $\sin\frac{\pi}{4}$ und $\cos\frac{\pi}{4}$.

Abgabe: Montag, 15.01.2024, 10:30 Uhr.