Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
C. Hounkpe

15.01.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 11

Aufgabe 1 (Trigonometrische Funktionen) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass Sinus und Kosinus differenzierbare Funktionen sind und für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$ und $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$.
Hinweis: Sie dürfen die in der Vorlesung gezeigte Tatsache benutzen, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = 1$.

Aufgabe 2 (Hyperbelfunktionen) (4 Punkte)
Die Funktionen cosh, sinh und tanh sind definiert als:

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(i) Untersuchen sinh, cosh und tanh auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und berechnen Sie deren Ableitung.

(ii) Zeigen sie, dass $y = \tanh$ die Gleichung $y'' = 2y(y^2 - 1)$ erfüllt.

Aufgabe 3 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils im Nullpunkt auf Stetigkeit und auf Differenzierbarkeit.

(i) $f(x) := (2 - x^2)|x|$ (ii) $f(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+2x} & \text{für } x \geq 0 \\ 3x^2 + \alpha x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit redux) (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig, aber nicht differenzierbar ist, und skizzieren Sie den Funktionsgraphen von f.

(ii) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie g'. Untersuchen Sie außerdem, ob g' stetig ist.

Abgabe: Montag, 22.01.2024, 10:30 Uhr.