Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
C. Hounkpe

22.01.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 12

Aufgabe 1 (Sinus) (4 Punkte)

Es seien $I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $J := (-1, 1)$ und $f\colon I \to J$ mit $f(x) := \sin x$.

(i) Zeigen Sie, dass f wohldefiniert und streng monoton wachsend ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

(iii) Zeigen Sie, dass f eine differenzierbare Umkehrabbildung $g\colon J \to I$ besitzt und berechnen sie $g'(x)$ für $x \in J$. g heißt *Arcus-Sinus*, Bezeichnung $g(x) = \arcsin x$.

Aufgabe 2 (Minima & Maxima) (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf lokale und globale Minima und Maxima sowie auf Sattelpunkte.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

(ii) $g\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $g(x) := (1 - \tan^2 x)^2$

(iii) $h\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) := x^x$

Aufgabe 3 (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Extrema) (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie für Funktionen $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$ folgende Aussagen.

(i) f differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ $|f|$ differenzierbar in x_0

(ii) f differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ $|f|$ stetig in x_0

(iii) f differenzierbar mit $f'(x) \leq 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) \geq 0$ für $x > x_0$
$\Rightarrow$ f hat lokales Minimum an x_0

(iv) f zweimal differenzierbar mit $f'' \leq 0$ und $f'(x_0) = 0$
$\Rightarrow$ f hat globales Maximum an x_0

(v) f viermal differenzierbar mit $f^{(1)}(x_0) = 0$, $f^{(2)}(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) = 0$ und $f^{(4)}(x_0) > 0$
$\Rightarrow$ f hat lokales Minimum an x_0

Aufgabe 4 (Mittelwertsatz) (4 Punkte)

(i) (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Seien $f, g \colon [a, b] \to R$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

gibt.

(ii) (Regel von L'Hôpital) Sei I ein Intervall $f, g \colon I \to R$ differenzierbare Funktion. Sei x_0 ein Häufungspunkt von I. Es existiere $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Sei $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

gilt.

(iii) Benutzen Sie die L'Hôpitalsche Regel, um folgende Grenzwerte zu bestimmen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}; \lim_{x \to 0} x \ln x$$

Abgabe: Montag, 29.01.2024, 10:30 Uhr.