

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 13

Aufgabe 1 (Riemann-Summe und integrierbare Funktionen)

(4 Punkte)

- (i) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Folge von Riemann-Summen das Integral $\int_0^b x^2 dx$.
- (ii) Finden Sie eine nicht integrierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Fundamentallemmma)

(4 Punkte)

Zeigen Sie das Fundamentallemmma der Variationsrechnung: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Falls gilt

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0$$

für alle stetigen Funktionen $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ so ist f konstant Null.

Aufgabe 3 (Konvergenz und Integral)

(4 Punkte)

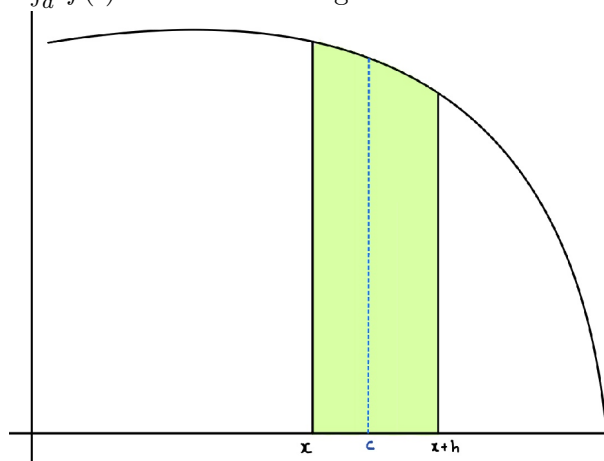
Sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, so dass $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Aufgabe 4 (Aufgabe zur Schulmathematik)

(4 Punkte)

Im folgenden Bild ist der Graph einer stetigen Funktion f zu sehen. Wir betrachten zu festem a die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Welche Aussage über den Ausdruck $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ ist richtig?



- (i) Er gibt den Flächeninhalt des farblich markiertem Flächenstücks an.
- (ii) Er ist gleich dem Funktionswert $f(c)$ für geeignetes c zwischen x und $x+h$.
- (iii) Beides ist richtig.
- (iv) Keines von beiden ist richtig.

Abgabe: Montag, 05.02.2024, 10:30 Uhr.