

Übung zur Vorlesung

**Analysis I**

WS 2023/24 — Blatt 2

**Aufgabe 1**

(4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen gelten.

(i)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n+1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 2**

(4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i)  $2^n > n^2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 5$ .

(ii) Es gilt  $(1+x)^n \geq 1+nx$  für alle  $x > -1$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  (Bernoullische Ungleichung).

**Aufgabe 3**

(4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Rechengesetze für reelle Zahlen, d.h. leiten Sie die Rechengesetze aus den Körpereigenschaften (K1)–(K5) her.

(i)  $(x^{-1})^{-1} = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$ .

(ii)  $x \cdot (-y) = -x \cdot y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(iii)  $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(iv)  $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$  für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 4**

(4 Punkte)

Beweisen Sie für  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$  folgende Aussagen durch Verwendung der Anordnungsaxiome (O1) und (O2).

(i)  $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$ . und  $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$ .

(ii)  $x < y \Leftrightarrow -y < -x$ .

(iii)  $x < y \Leftrightarrow -y < -x$ .

(iv)  $x < y$  und  $z < w \Rightarrow x + z < y + w$ .

(v)  $x < y$  und  $z < 0 \Rightarrow xz > yz$ .

(vi)  $x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$ .

(vii) Aus  $x^2 < y^2$  und  $y > 0$  folgt  $x < y$ .