

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 3

Aufgabe 1 (Ungleichungen)

(4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen für $x, y \in \mathbb{R}$.

- (i) Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- (ii) Young'sche Ungleichung: $|xy| \leq \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$.

Aufgabe 2 (Eine Verbindung zur Schulanalyse)

(4 Punkte)

- (i) Wie lässt sich Dreiecksungleichung geometrisch interpretieren?
- (ii) Kann man die Dreiecksungleichung für drei oder mehr Zahlen verallgemeinern? Hat das auch noch eine geometrische Bedeutung? Beweisen Sie diese Dreiecksungleichung mit einem geeigneten Beweisverfahren.
- (iii) Betrachten Sie die Ungleichung $|a - b| \leq |a - c| + |b - c|$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Welcher Zusammenhang besteht hier (auch geometrisch) zur Dreiecksungleichung? Erläutern Sie. Zeigen Sie die Ungleichung.

Aufgabe 3 (Mehr Induktion)

(4 Punkte)

- (i) Die endliche geometrische Reihe: Zeigen Sie, dass für $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- (ii) Zeigen Sie, dass Doppelsummen vertauschbar sind, das heißt für reelle Zahlen a_{ij} gilt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

- (iii) Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j.$$

Aufgabe 4 (Mengen)

(4 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage. Zu je zwei nicht leeren Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $A \cup B = \mathbb{R}$ und der Eigenschaft

$$\forall a \in A; \forall b \in B : a < b$$

existiert genau ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x < c \Rightarrow x \in A \quad \text{und} \quad x > c \Rightarrow x \in B$$

Hinweis: Benutzen Sie das Vollständigkeitsaxiom (V1) der Vorlesung.

Abgabe: Montag, 13.11.2023, 10:00 Uhr.

Erstsemester-Hütte

Bald ist es endlich soweit und es geht auf die Erstihütte. Alles, was ihr dazu wissen müsst, erfahrt ihr hier:

Wann geht's los?

Am Freitag, den **8.12.** und zurück kommen wir am Sonntag, den **10.12.**

ca. 9 Uhr für die Wanderung zur Hütte

14 Uhr für alle Anderen

Wo geht es eigentlich hin?

Wir fahren ins Dekan-Strohmeier-Haus im Münstertal im Schwarzwald

Was tut man eigentlich auf so einer Hütte?

Sich entspannen, Mitstudis kennenlernen, an lustigen Workshops teilnehmen, Spielchen spielen, lecker essen, ...

Und was kostet das?

40 Euro, die bei der Anmeldung mitzubringen sind!

Was für eine Anmeldung?

Am Donnerstag, den 16. November, könnt ihr euch nach der Vorlesung **um 10.00 vor der Mathe-Fachschaft** verbindlich anmelden. Bitte **bringt die 40 Euro mit**, nur dann bekommt ihr einen sicheren Platz, denn die Teilnehmerzahl ist beschränkt.

Die 40 € sind **nicht kostendeckend**, das heißt, wenn ihr doch nicht kommt, können wir euch das Geld leider nicht zurückerstatten. Die Anmeldung ist also **verbindlich!**

Bei der Anmeldung brauchen wir von euch folgende Infos:

- Name, Geburtsdatum und E-Mail!
- Habt ihr ein Semesterticket?
- Könntet ihr ein Auto zur Verfügung stellen?
- Seid ihr Veganer o.ä. oder habt ihr Allergien, Unverträglichkeiten,...?
- Bringt ihr einen Kuchen mit?
- Wollt ihr zur Hütte wandern?

Und mein Mathe-Zettel?

Die Erfahrung hat gezeigt, dass dafür immer genug Zeit blieb und da noch viele ältere Mathestudis mitfahren, könnt ihr bestimmt auch den einen oder anderen Tipp bekommen...

Wenn ihr noch Fragen habt, dann mailt uns an erstis@math.uni-freiburg.de
Clara, Moritz, Jannek und die Mathefachschaft