Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
C. Hounkpe

13.11.2023

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 4

Aufgabe 1 (Diskrete Mengen) (4 Punkte)

(i) Sei $A \subset \mathbb{R}$ endlich (d.h. sie enthält nur endlich viele Elemente). Zeigen Sie, dass gilt $\inf A \in A$ und $\sup A \in A$.

(ii) Die Menge $B \subset \mathbb{Z}$ sei nach unten beschränkt. Zeigen Sie, dass gilt $\inf B \in B$.

Aufgabe 2 (Einfache Folgen) (4 Punkte)
Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Beschränktheit und Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ (ii) $a_n := \dfrac{2n^2 - 7n + 9}{n(n+2)}$ (iii) $a_n := \dfrac{(-1)^n n^2 - 1}{n^2 + 3}$

Aufgabe 3 (Komplizierte Folgen) (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Folge gegeben durch $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ nicht konvergiert, wobei $\lfloor x \rfloor = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ die ganzzahlige Untergrenze von x bezeichnet.

(ii) Beweisen Sie, dass die Folge gegeben durch $a_n = \sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergiert. Zeigen Sie hierfür zunächst die folgende Gleichung

$$(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1}).$$

Tipp: Nutzen Sie zum Zeigen der Gleichung die Formel für die endliche geometrische Reihe.

Aufgabe 4 (Konvergenz) (4 Punkte)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Welche der folgenden Eigenschaften impliziert die Konvergenz der Folge? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(i) $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(ii) Es gilt $a_{n+1} - a_n \to 0$.

(iii) Es gilt $a_{n+1} - a_n \to 0$ und $(-1)^n a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < a_{n+1}$.

Abgabe: Montag, 20.11.2023, 10:30 Uhr.