Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
C. Hounkpe

20.11.2023

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 5

Aufgabe 1 (Bestimmte Divergenz) (4 Punkte)

(i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bestimmt divergent gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$. Zeigen Sie, dass $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und dass gilt:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_0}} \frac{1}{a_n} = 0$$

(ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann divergiert die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$.

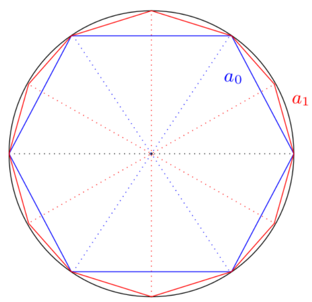
(iii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 2 (π) (4 Punkte)

Sei V_0 das im Kreis mit Radius 1 einbeschriebene reguläre Sechseck. Wir definieren rekursiv die regulären Vielecke V_n, derart dass V_n doppelt so viele Ecken wie V_{n-1} hat. Sei a_n die Seitenlänge von V_n.

(i) Zeigen Sie, dass gilt $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$

Hinweis: Wir setzen im Folgenden den Satz des Pythagoras und weitere (notwendige) Sätze am Dreieck als bekannt voraus.



(ii) Stellen Sie den Flächeninhalt f_n des Vielecks V_n in Abhängigkeit von a_n dar.

(iii) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Sie können verwenden, dass für zwei Polygone P_1, P_2, wobei P_1 vollständig in P_2 liegt, ist der Flächeninhalt von P_1 immer kleiner gleich dem Flächeninhalt von P_2.

Bemerkung: Man kann diese Konstruktion verwenden, um π als den Grenzwert der Folge$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu definieren.

Aufgabe 3 (Noch mehr Folgen) (4 Punkte)

(i) Untersuchen Sie die Folgen gegeben durch

(a) $a_n = n - \frac{1}{n}$ (b) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $c_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ (d) $d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$

(e) $e_n = \frac{2}{3+(n-1)^2}$ (f) $f_n = \frac{1-n^2}{1+n}$

auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(ii) Ist die folgende Aussage richtig? Beweisen bzw. widerlegen Sie: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Weiters sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt $f(a_n) \to f(a)$ (für $n \to \infty$).

Aufgabe 4 (Verbindung zur Schulmathematik) (4 Punkte)
Mit einem Taschenrechner kann man irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ und π in Dezimaldarstellung mit einer bestimmten Genauigkeit berechnen. Fur $n \in \mathbb{N}$ seinen x_n bzw. y_n die auf n Nachkommastellen korrekt gereundeten Werte $\sqrt{2}$ bzw. π. Zum Beispiel ist $y_3 = 3.14$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Geben sie ein moglichst kleines ϵ_n and, so dass $|x_n - \sqrt{2}| < \epsilon$ und $|y_n - \pi| < \epsilon$ gilt.

Abgabe: Montag, 27.11.2023, 10:30 Uhr.