Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
C. Hounkpe

27.11.2023

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 6

Aufgabe 1 (Häufungspunkte) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Zahl a ist Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Für alle $\epsilon > 0$ und alle $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \geq N$ mit $|a_n - a| < \epsilon$.

(iii) Für alle $\epsilon > 0$ enthält die Menge $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon\}$ unendlich viele Elemente.

Aufgabe 2 (Cauchy-Folgen und Vollständigkeit) (4 Punkte)

Wir zeigen, dass aus Konvergenz jeder Cauchy-Folge die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt. Diese beiden Bedingungen sind also äquivalent. Wir nehmen dazu an, dass jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegen einen Limes $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dadurch konstruieren wir das Infimum einer beschränkten, nicht leeren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$.
Wir starten mit a_1 als einer beliebigen unteren Schranke von A und b_1, einem beliebigen Element von A. Dann wenden wir einen Bisektionsalgorithmus an: Für gegebene $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Falls c_n eine untere Schranke von A ist, so setzen wir $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$, falls nicht setzen wir $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$.

(i) Zeigen Sie, dass sowohl a_n als auch b_n Cauchy-Folgen sind.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$

(iii) Zeigen Sie, dass $x = \inf A$.

Aufgabe 3 (Abschätzungen für Reihen) (4 Punkte)

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen. Zeigen Sie

(i) Falls $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

(ii) Falls $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$ gilt auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$

Aufgabe 4 (Wurzel 2) (4 Punkte)

Durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \dfrac{2+a_n}{1+a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wird eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Es gilt $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es gilt $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

(iv) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Abgabe: Montag, 04.12.2023, 10:30 Uhr.