

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 8

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Man kann zeigen, dass es für Polynome mit Grad größer als 4 keine geschlossene Formel zum Finden von Nullstellen geben kann.

- (i) Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom mit ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle besitzt.
- (ii) Sie wollen eine die Nullstelle des Polynoms $p(x) = 8x^5 + 3x^2 - 2$ auf 10 Nachkommastellen genau berechnen. Wie gehen Sie vor?

Tipp: Eventuell ist ein Bisektionsverfahren hier nützlich.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Beweisen Sie, dass gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie für Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ folgende Aussagen.

- (i) f stetig in $x_0 \Leftrightarrow |f|$ stetig in x_0
- (ii) f, g stetig in $x_0 \Leftrightarrow f \cdot g$ stetig in x_0
- (iii) Ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so gilt: f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f}$ stetig in x_0
- (iv) Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x_0) \neq 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

- (i) Beweisen Sie, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ einen *Fixpunkt* hat, d.h. es gibt $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.
Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz.
- (ii) Geben Sie stetige Funktionen $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$ bzw. $f : [a, \infty) \rightarrow [a, \infty)$ an, die keinen Fixpunkt haben.

Abgabe: Montag, 18.12.2023, 10:30 Uhr.