Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
C. Hounkpe

18.12.2023

Übung zur Vorlesung

Analysis I

WS 2023/24 — Blatt 9

Aufgabe 1 (Gleichmäßige Stetigkeit) (4 Punkte)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) f nimmt sein Maximum oder Minimum an.

(ii) f ist gleichmäßig stetig.

Hinweis: Verwenden Sie jeweils den Satz vom Minimum und Maximum stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen auf einem geeigneten Intervall.

Aufgabe 2 (Gleichmäßige Konvergenz) (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass gleichmäßige Konvergenz einer reellen Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegen $f \colon D \to \mathbb{R}$ äquivalent ist zu, dass $||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$ eine Nullfolge definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $||f||_\infty$ die Eigenschaften einer Norm erfüllt, d.h.

a) Es gilt $||f||_\infty \geq 0$ für alle $f \colon D \to \mathbb{R}$ und $||f||_\infty = 0$ genau dann wenn f konstant auf die Null abbildet (Positiv Definitheit).

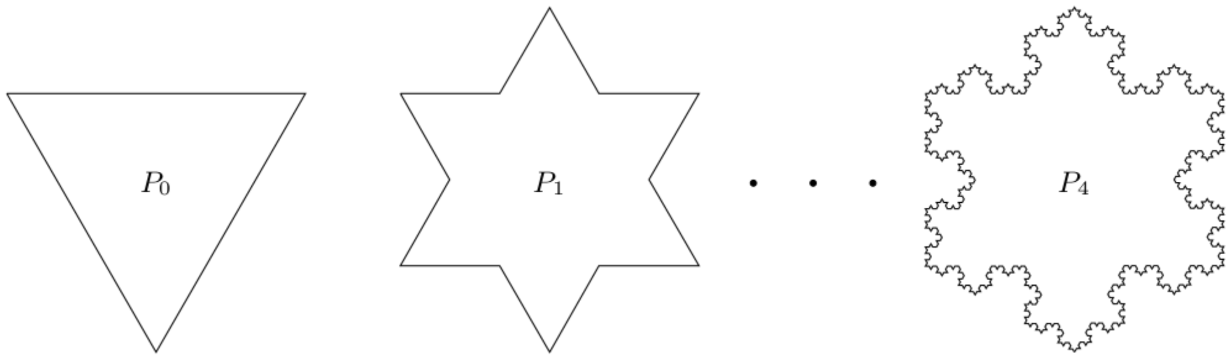
b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $||\lambda f||_\infty = |\lambda|\, ||f||_\infty$ (Homogenität).

c) Für alle $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ gilt $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ (Dreiecksungleichung).

Aufgabe 3 (Konvergenz der Exponentialreihe) (4 Punkte)
Zeigen Sie dass die Exponentialreihe $(\exp_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\exp_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ auf abgeschlossenen Intervallen gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4 (Schöne Feiertage!) (4 Punkte)

Sei P_0 das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n , indem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mitteleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Sei l_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n .

(i) Bestimmen Sie l_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} l_n = \infty$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie $A_n - A_{n-1}$. Zeigen Sie, dass A_n für $n \to \infty$ konvergiert.

Abgabe: Montag, 08.01.2024, 10:30 Uhr.