Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Aufgabensammlung

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1.
Sei X eine Menge, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf X und $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Definiere

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset X \;\middle|\; A = f^{-1}(B) \text{ für ein } B \in \mathcal{B} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist.

Aufgabe 2.
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue messbare Menge mit $\lambda^n(A) < \infty$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(h) \coloneqq \lambda^n(A \cap \{\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < h \,\})$$

wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 3.
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ und wir setzen $\mu \coloneqq \lambda^2 \circ f^{-1}$, wobei

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \log(\|(x,y)\|_1), & (x,y) \neq 0, \\ -\infty, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f $\mathcal{B}^2$-$\overline{\mathcal{B}^1}$-messbar ist.
(b) Berechnen Sie $\mu([a,b))$, für $-\infty < a < b < \infty$.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_B \frac{1 + x^n y^n}{1 + x^2 + y^2}\, d(x,y) = \pi \ln 2$, wobei $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Für diese Aufgabe benötigen wir den Transformationssatz und Satz von Fubini.

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{x^k(1-x)}{1+x}\, dx = \ln 2.$