Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 1 – 16.10.2024

Abgabe: 23.10.2024, 10:00 Uhr

Hinweis: Vergessen Sie nicht, sich für die Tutorien anzumelden!
Das Belegungsverfahren findet im Zeitraum von Mi (16.10.), 12 Uhr bis Fr (18.10.), 14 Uhr statt.
Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in den Abgabekästen im Rechenzentrum (Hermann-Herder-Straße 10) im 2. OG.

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist mit

$$\sigma(\mathcal{E}) \coloneqq \bigcap \{\, \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra in } X \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \,\}$$

für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.**

(a) Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum, und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(\mathcal{C})$ eine σ-Algbera ist.

(b) Sei X eine beliebige Menge und seien $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{P}(X)$, $i \in I$, Mengensysteme. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\sigma\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i\right) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\right).$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} \coloneqq \{\, A \subset X \mid A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist abzählbar} \,\}$$

eine σ-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ die von

$$\mathcal{M} \coloneqq \{\, A \subset X \mid A \text{ ist endlich} \,\}$$

erzeugte σ-Algebra ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei X eine Menge und $\omega\colon X \to [0, \infty)$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) \coloneqq \sum_{x\in A} \omega(x)$$

ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist. Da X überabzählbar sein darf, ist die unendliche Summe wie folgt definiert:

$$\sum_{x\in A} \omega(x) = \sup\left\{ \sum_{x\in K} \omega(x) \;\middle|\; K \subset A \text{ ist endlich} \right\}.$$

Dies geht nur, da ω nicht-negativ ist.