Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 10 – 18.12.2024

Abgabe: 08.01.2025, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Es sei $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty$.
Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ μ-f.ü. gegen eine integrierbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert, und es gilt:

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Für $x \in [0,1]$ betrachten wir die *dyadische Entwicklung* von x als

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x) \cdot 2^{-n}, \quad d_n(x) \in \{0,1\}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Wir entscheiden uns immer für die nicht abbrechende Entwicklung von x, falls es eine abbrechende und eine nicht abbrechende Entwicklung gibt)
Zeigen Sie, dass $(d_n(x))_{n\geq 1}$ "asymptotisch ebenso viele Nullen wie Einsen" hat für λ-fast alle $x \in [0,1]$.
Dafür definieren wir $f_k(x) := 2(d_k(x) - \frac{1}{2})$ und $F_n := \frac{1}{n}(f_1 + \ldots + f_n)$ und gehen Sie wie folgt vor:

(a) Für alle $j, k \in \mathbb{N}$ ist $\int_0^1 f_j f_k\, d\lambda = \delta_{jk}$.
(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\int_0^1 F_n^2\, d\lambda = \frac{1}{n}$.
(c) $\lim_{n\to\infty} F_n^2(x) = 0$ für λ-fast alle $x \in [0,1]$ (siehe Aufgabe 1).
(d) Für $k < l \leq m$ gilt $|F_l| \leq \frac{m-k}{k} + |F_k|$. Folgern Sie: $\lim_{n\to\infty} F_n = 0$ λ-f.ü. auf $[0,1]$.

Hinweis: Stellen Sie sich vor, $(d_n(x))_{n\geq 1}$ entspricht der Ergebnisfolge unendlich vieler Münzwürfe einer idealen Münze mit den Seiten "0" und "1". Das ist das sogenannte *starke Gesetz der großen Zahlen* und heißt, dass die Seiten "0" und "1" asymptotisch mit gleicher Häufigkeit auftreten.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Beweisen Sie mithilfe einer Differentiation unter dem Integralzeichen in der Gleichung

$$t^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \exp(-tx)\, dx \quad (s, t > 0)$$

die *Funktionalgleichung der Gammafunktion:* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s > 0)$.
Hinweis: Die *Gammafunktion* ist definiert als

$$\Gamma(s) \coloneqq \int_0^\infty \exp(-t) t^{s-1}\, dt, \quad (s > 0).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Zeigen Sie, dass die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(t) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-x^2/2 + itx\Big)\, dx \quad (t \in \mathbb{R})$$

der Differentialgleichung $f'(t) + tf(t) = 0$ genügt, und damit $f(t) = \sqrt{2\pi} \exp(-t^2/2)$ gilt.