Analysis III

Blatt 11 – 08.01.2025

Abgabe: 15.01.2025, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (4 Punkte + 4 Bonuspunkte)**.**

(a) Seien $f \in L^p(X)$ und $g \in L^q(X)$, wobei $p, q \in (1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Zeigen Sie die *Hölder-Ungleichung*, das heißt $fg \in L^1(X)$ und

$$\|fg\|_{L^1(X)} \leq \|f\|_{L^p(X)} \|g\|_{L^q(X)}.$$

Folgern Sie daraus nun die *Interpolationsungleichung*, das heißt für $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$ mit $p, q \in [1, \infty]$ und $\theta \in [0, 1]$, gilt

$$\|f\|_{L^r(X)} \leq \|f\|_{L^p(X)}^{1-\theta} \|f\|_{L^q(X)}^{\theta},$$

wobei $\frac{1}{r} := \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$.

(b) Untersuchen Sie die Inklusionshierarchie der folgenden Räume
- $L^p(X)$ und $L^q(X)$ für $1 \leq p \leq q$ und $\mu(X) < \infty$.
- Gilt obige Aussage auch falls $\mu(X) = \infty$?
- ℓ^p und ℓ^q für $1 \leq p \leq q$ wobei $\ell^r := L^r(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \delta)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < \infty$ $C_c^\infty((a,b))$ dicht in $L^p((a,b))$ liegt, wobei

$$C_c^\infty((a,b)) := \{\, \phi \in C^\infty \mid \operatorname{supp}\phi \text{ ist kompakte Teilmenge von } (a,b) \,\}.$$

Gehen Sie dafür wie folgt vor:

1. Zeigen Sie, dass der Raum der Treppenfunktionen mit kompaktem Träger $\mathcal{T} := \{\, \phi \in \operatorname{lin}\{\chi_A : A \in \mathcal{B}((a,b))\} \mid \operatorname{supp}\phi \text{ ist kompakte Teilmenge von } (a,b) \,\}$ dicht in $L^p((a,b))$ liegt.
2. Zeigen Sie nun, dass $C_c^\infty((a,b))$ dicht in $\mathcal{T}$ liegt. Verwenden Sie dafür einen geeigneten Glättungskern wie in Aufgabe 3, Blatt 9.
3. Kombinieren Sie die beiden vorherigen Aussagen, um die Dichtheit von $C_c^\infty((a,b))$ in $L^p((a,b))$ zu zeigen.

Hinweis: Die Absolutstetigkeit des Integrals kann hilfreich sein.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Für $a > 0$ betrachten wir die Funktionenfolge

$$\delta_a(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\delta_a(x) \overset{a \to 0}{\to} 0$ λ-fast überall.
(b) Bestimmen Sie $\|\delta_a\|_{L^1}$ für alle $a > 0$ und diskutieren Sie, warum $(\delta_a) \subset L^1(\mathbb{R})$ nicht gegen 0 konvergiert.
(c) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\phi(x)\,dx \quad \text{für alle } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in L^1(I)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{t\to\infty} \int_I f(x) \exp(\mathrm{i}tx)\,dx = 0.$$