Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 12 – 15.01.2025

Abgabe: 22.01.2025, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; F(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$ integrierbar ist und dass die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^3} F\, d\lambda^3 = \left(\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda\right) \left(\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda\right) \left(\int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda\right)$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei $D \in \mathcal{B}^m$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion.

(a) Zeigen Sie mit den Prinzip von Cavalieri, dass der Graph $G_f = \{\, (x, f(x)) \mid x \in D \,\}$ eine λ^{m+1}-Nullmenge ist.

Sei nun f zusätzlich nichtnegativ.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $V = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x \in D, 0 \le y \le f(x) \,\}$ zu $\mathcal{B}^{m+1}$ gehört und dass

$$\lambda^{m+1}(V) = \int_D f\, d\lambda^m$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $h\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}; t \mapsto \lambda^m(\{f \ge t\})$ messbar ist und dass die Formel

$$\int_D f\, d\lambda^m = \int_0^\infty \lambda^m(\{f \ge t\})\, dt$$

gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das von $(0,0), (1,0)$ und $(0,1)$ aufgespannte Dreieck und sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\int_D g(x+y)\, d\lambda^2 = \int_0^1 g(t)t\, dt.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Im Folgenden wollen wir den Begriff der *schwachen Ableitung* einführen.
Dazu seien $I = [a,b]$, $F \in L^2(I)$ und $\phi \in C_c^\infty((a,b))$. Wir suchen nun eine Funktion $f \in L^2(I)$ die die Regel der partiellen Integration für alle ϕ erfüllt. Das heißt, es gilt

$$\int_I f\phi\, d\lambda = -\int_I F(\partial\phi)\, d\lambda, \quad \text{für alle } \phi \in C_c^\infty(I).$$

Wir schreiben dann $\partial F \coloneqq f$ und nennen f die *schwache Ableitung* von F.
Bestimmen Sie, falls möglich, die schwache Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u(x) = |x|$.

(b) $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Quiz: Ist die schwache Ableitung eindeutig?