Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2024/25
Prof. Dr. Patrick Dondl, Oliver Suchan

Analysis III

Blatt 13 – 22.01.2025

Abgabe: 29.01.2025, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

https://aam.uni-freiburg.de/agdo/lehre/ws24/analysis3/

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Es bezeichne $A \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche, die von den Geraden $y = -x/2$, $y = 1 - x/2$, $y = x$ und $y = x - 1$ eingeschlossen wird. Weiter sie $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\Phi(u, v) = (u + 2v, u - v)$.

(a) Zeigen Sie: $\Phi(A) = [0, 2] \times [0, 1]$ und $|\det \mathrm{D}\Phi(u, v)| = 3$ für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (x + 2y) \exp(y - x)\, d\lambda^2(x, y)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Seien $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine invertierbare Matrix und $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.

(a) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\|Ax\|_2)\, dx$.
(b) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^m} \exp\Big(-x^\top Bx\Big)\, dx$.
(c) Setze $E = \Big\{\, x \in \mathbb{R}^m \;\Big|\; x^\top Bx \leq 1 \,\Big\}$. Berechnen Sie $\lambda^m(E)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

(a) Sei $R > 0$. Der *Vivianische Körper* ist definiert durch

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq Rx \right\}.$$

Berechnen Sie $\lambda^3(V)$.

(b) Sei $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2 \}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A (x^2 + y^2)^2 \exp\Big(2(1 - z)^7\Big)\, d(x, y, z).$$

(c) Sei $B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0 \}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_B 4z(x^2 + y^2)\, d(x, y, z).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Beweisen Sie für das Lebesgue-Maß des durch

$$A \coloneqq \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq (\varrho(z))^2, z \in [a, b] \right\}$$

gegeben Rotationskörpers mit stetigem $\varrho\colon [a, b] \to (0, \infty)$ die Formel

$$\lambda^3(A) = \pi \int_a^b (\varrho(z))^2\, dz.$$

Tipp: Verwenden Sie die Zylinderkoordinaten $f(r, \varphi, z) \coloneqq (r \cos\varphi, r \sin\varphi, z)^\top$.